関数 $f(x)$ を、$f(x)$ の $x=a$ における $\underbrace{f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),}$ -------, $f^{(n)}(a)$ を持つ多項式に変形してみよう。

$f^{(0)}(a),\ f^{(1)}(a),\ f^{(2)}(a),\ f^{(3)}(a)$ とも書く。

関数 $f(x)$ の、$x=a$ における第 n 次の微分係数 $f^{(n)}(a)$ は

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$ と表せる。

x が a に十分近いときは

$$f^{(n)}(a) \fallingdotseq \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$ と表せる。

ここで誤差を C とおくと、次のように書き表せる。

$$f^{(n)}(a) = \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \pm C$$

これを変形すると

$$f^{(n)}(a)(x-a) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) \pm C(x-a)$$

すなわち

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a) \mp C(x-a) \quad \text{------------------- ①}$$

関数 $f^{(n-1)}(x)$ が $f^{(n-1)}(a)$ と $f^{(n)}(a)$ を持つ多項式になっている。

そこで、これを a から x まで積分してみよう。

$$\int_a^x f^{(n-1)}(x)\,dx = \int_a^x f^{(n-1)}(a)\,dx + \int_a^x f^{(n)}(a)(x-a)\,dx \mp \int_a^x C(x-a)\,dx$$

$$\left[f^{(n-2)}(x)\right]_a^x = f^{(n-1)}(a)\left[x\right]_a^x + \frac{f^{(n)}(a)}{2}\left[(x-a)^2\right]_a^x \mp \frac{c}{2}\left[(x-a)^2\right]_a^x$$

$$f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) = f^{(n-1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{2}(x-a)^2 \mp \frac{c}{2}(x-a)^2$$

関数 $f^{(n-2)}(x)$ が $f^{(n-2)}(a)$, $f^{(n-1)}(a)$, $f^{(n)}(a)$ を持つ多項式になっている.

すなわち

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(n)}(a)}{2}(x-a)^2 \mp \frac{c}{2}(x-a)^2 \quad \text{------------------ ②}$$

そこで、さらに、これを a から x まで積分してみよう。

$$\int_a^x f^{(n-2)}(x)\,dx = \int_a^x f^{(n-2)}(a)\,dx + \int_a^x f^{(n-1)}(a)(x-a)\,dx + \int_a^x \frac{f^{(n)}(a)}{2}(x-a)^2\,dx \mp \int_a^x \frac{c}{2}(x-a)^2\,dx$$

$$\left[f^{(n-3)}(x)\right]_a^x = f^{(n-2)}(a)\left[x\right]_a^x + \frac{f^{(n-1)}(a)}{2}\left[(x-a)^2\right]_a^x + \frac{f^{(n)}(a)}{2\times3}\left[(x-a)^3\right]_a^x \mp \frac{c}{2\times3}\left[(x-a)^3\right]_a^x$$

$$f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) = f^{(n-2)}(a)(x-a) + \frac{f^{(n-1)}(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}(a)}{2\times3}(x-a)^3 \mp \frac{c}{2\times3}(x-a)^3$$

関数 $f^{(n-3)}(x)$ が
$f^{(n-3)}(a)$, $f^{(n-2)}(a)$, $f^{(n-1)}(a)$, $f^{(n)}(a)$
を持つ多項式になっている.

すなわち

$$f^{(n-3)}(x) = f^{(n-3)}(a) + f^{(n-2)}(a)(x-a) + \frac{f^{(n-1)}(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}(a)}{2\times3}(x-a)^3 \mp \frac{c}{2\times3}(x-a)^3 \quad \text{------------ ③}$$

そこで、さらに、これを a から x まで積分してみよう。

$$\int_a^x f^{(n-3)}(x)\,dx = \int_a^x f^{(n-3)}(a)\,dx + \int_a^x f^{(n-2)}(a)(x-a)\,dx + \int_a^x \frac{f^{(n-1)}(a)}{2}(x-a)^2\,dx + \int_a^x \frac{f^{(n)}(a)}{2\times3}(x-a)^3\,dx \mp \int_a^x \frac{c}{2\times3}(x-a)^3\,dx$$

$$\left[f^{(n-4)}(x)\right]_a^x = f^{(n-3)}(a)\left[x\right]_a^x + \frac{f^{(n-2)}(a)}{2}\left[(x-a)^2\right]_a^x + \frac{f^{(n-1)}(a)}{2\times3}\left[(x-a)^3\right]_a^x + \frac{f^{(n)}(a)}{2\times3\times4}\left[(x-a)^4\right]_a^x \mp \frac{c}{2\times3\times4}\left[(x-a)^4\right]_a^x$$

$$f^{(n-4)}_{(x)} - f^{(n-4)}_{(a)} = f^{(n-3)}_{(a)}(x-a) + \frac{f^{(n-2)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{2\times3}(x-a)^3 + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2\times3\times4}(x-a)^4 \mp \frac{C}{2\times3\times4}(x-a)^4$$

すなわち

$$f^{(n-4)}_{(x)} = f^{(n-4)}_{(a)} + f^{(n-3)}_{(a)}(x-a) + \frac{f^{(n-2)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{2\times3}(x-a)^3 + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2\times3\times4}(x-a)^4 \mp \frac{C}{2\times3\times4}(x-a)^4 \quad \text{------------} ④$$

関数 $f^{(n-4)}_{(x)}$ は $f^{(n-4)}_{(a)}, f^{(n-3)}_{(a)}, f^{(n-2)}_{(a)}, f^{(n-1)}_{(a)}, f^{(n)}_{(a)}$ を持つ多項式になっている.

ここで、①, ②, ③, ④ を並べてみると

$$f^{(n-1)}_{(x)} = f^{(n-1)}_{(a)} + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{1}(x-a)^1 \mp \frac{C}{1}(x-a)^1$$

$$f^{(n-2)}_{(x)} = f^{(n-2)}_{(a)} + \frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{1}(x-a)^1 + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 \mp \frac{C}{2}(x-a)^2$$

$$f^{(n-3)}_{(x)} = f^{(n-3)}_{(a)} + \frac{f^{(n-2)}_{(a)}}{1}(x-a)^1 + \frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2\times3}(x-a)^3 \mp \frac{C}{2\times3}(x-a)^3$$

$$f^{(n-4)}_{(x)} = f^{(n-4)}_{(a)} + \frac{f^{(n-3)}_{(a)}}{1}(x-a)^1 + \frac{f^{(n-2)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(n-1)}_{(a)}}{2\times3}(x-a)^3 + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2\times3\times4}(x-a)^4 \mp \frac{C}{2\times3\times4}(x-a)^4$$

したがって、これをくり返していくと

$$f^{(n-n)}_{(x)} = f^{(0)}_{(a)} + \frac{f^{(1)}_{(a)}}{1}(x-a)^1 + \frac{f^{(2)}_{(a)}}{2}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}_{(a)}}{2\times3}(x-a)^3 + \text{-----} + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{2\times3\times\cdots\times n}(x-a)^n \mp \frac{C}{2\times3\times\cdots\times n}(x-a)^n$$

すなわち

$$f^{(0)}_{(x)} = f^{(0)}_{(a)} + f^{(1)}_{(a)}(x-a) + \frac{f^{(2)}_{(a)}}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}_{(a)}}{3!}(x-a)^3 + \text{------} + \frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n \mp \frac{C}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \pm \frac{C}{n!}(x-a)^n$$

ここで　$x=a$ の近傍（x が a に十分近いとき）ならば

$n \to \infty$ のとき　$\frac{C}{n!}(x-a)^n \to 0$　だから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right\}$$

は限りなく $f(x)$ に近づく。

$x=a$ の近傍のとき

そこで，このときは，次のように表すことができる。

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

この右辺をテイラー展開という。

$x=0$ の近傍のとき

特に　$a=0$ とした

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

をマクローリン展開とよぶ。