$\boxed{1}$ (30 点)

(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数

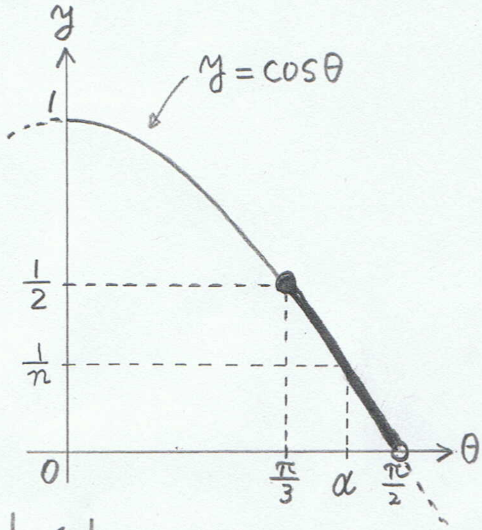
$$f_n(\theta) = (1 + \cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ．

(1) $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$

$$f_n'(\theta)=-\sin\theta\cdot\sin^{n-1}\theta+(1+\cos\theta)(n-1)\sin^{n-2}\theta\cdot\cos\theta$$
$$=-\sin^n\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\sin^{n-2}\theta$$
$$=\sin^{n-2}\theta\left\{(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta\right\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta\left\{(n-1)\cos\theta+(n-1)\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\right\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta\left\{(n-1)\cos\theta+(n-1)\cos^2\theta-1+\cos^2\theta\right\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta\left\{(n-1)\cos\theta+n\cos^2\theta-1\right\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta\left\{n\cos^2\theta+(n-1)\cos\theta-1\right\}$$
$$=\sin^{n-2}\theta(n\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$
$$=n\sin^{n-2}\theta\left(\cos\theta-\frac{1}{n}\right)(\cos\theta+1)$$



$n\geqq 2$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta+1>0$ だから

$f_n'(\theta)=0$ となるのは

$\sin\theta=0$ のときで $\theta=0$,

または

$\cos\theta=\frac{1}{n}$ のときで $n\geqq 2$ だから $0<\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{2}$ となり

このとき θ の値はただ1つ存在するので

それを α とおくと $\frac{\pi}{3}\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ であり

$\cos\alpha=\frac{1}{n}$ ---- ①

と書き表せる。

すると $f_n(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$	0	+	0	−	−
$f_n(\theta)$	0	↗	最大	↘	1

$f_n(\theta)$ の最大値は $\theta=\alpha$ のときで

$$M_n=f_n(\alpha)=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha$$

$$M_n = (1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha$$

ここで①より $\cos\alpha = \frac{1}{n}$,

$\frac{\pi}{3} \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\sin\alpha > 0$ だから $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

したがって

$$M_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

(2)

数列の極限の確認

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$$

$$M_n^n = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2-n}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{-n^2}{-2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} M_n^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= e\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$