2 (30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ．

p, q が素数のとき

$A = p^q + q^p$ とおく。

素数は、2のみが偶数で、他は全て奇数である。

そこで、まず、素数 p, q を偶数、奇数で考えてみる。

p と q がともに偶数のとき、偶数素数は2のみだから、$p = q = 2$ のとき

$A = 2^2 + 2^2 = 8$ となって、Aは素数ではない。

p と q がともに奇数のとき、「奇数の奇数乗」は奇数だから

A = 奇数 + 奇数 = 偶数 となって、2より大きい偶数素数は存在しないから、Aは素数ではない。

p, q の一方が奇数で他方が偶数のとき、「奇数の偶数乗」は奇数であり、「偶数の奇数乗」は偶数であるから、

A = 奇数 + 偶数 = 奇数 となって、Aが素数となる可能性がある。

そこで、p, q の一方が奇数で他方が偶数のときを考えていけばよいので

p を奇数素数とし、q を偶数素数とする。偶数素数は2のみだから

当然、$q = 2$ とする。（p, q の対称性から、どちらを2としてもよい。）

p は3以上の素数となるので、まず、$p = 3$ として、Aを求めてみる。

$p = 3$ のとき

$A = 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$ 　Aは素数である。

同様にして

$p = 5$ のとき

$A = 5^2 + 2^5 = 25 + 32 = 57 = 3 \times 19$ 　Aは3の倍数で、素数ではない。

$p = 7$ のとき

$A = 7^2 + 2^7 = 49 + 128 = 177 = 3 \times 59$ 　Aは3の倍数で、素数ではない。

$p = 11$ のとき

$A = 11^2 + 2^{11} = 121 + 2048 = 2169 = 3 \times 723$ 　Aは3の倍数で、素数ではない。

これらから、$p \geqq 5$ の素数のとき Aは3の倍数になってしまうのでは と考える。

そこで、$p \geqq 5$ の素数のとき、Aが3の倍数となることを証明してみることになる。

さて、5以上の素数はどれも、偶数(2の倍数)でもなく、かつ3の倍数でもない。このような数は、どのように表せるだろうか。
そこで、2の倍数であり、かつ3の倍数でもある数は、6の倍数だから、
6の倍数を使って、調べてみよう。

6の倍数	6	(2,3の倍数)	6の倍数
6の倍数 ＋1	7		6の倍数 －5
6の倍数 ＋2	8	(2の倍数)	6の倍数 －4
6の倍数 ＋3	9	(3の倍数)	6の倍数 －3
6の倍数 ＋4	10	(2の倍数)	6の倍数 －2
6の倍数 ＋5	11		6の倍数 －1
6の倍数	12	(2,3の倍数)	6の倍数
6の倍数 ＋1	13		6の倍数 －5
6の倍数 ＋2	14	(2の倍数)	6の倍数 －4
6の倍数 ＋3	15	(3の倍数)	6の倍数 －3
6の倍数 ＋4	16	(2の倍数)	6の倍数 －2
6の倍数 ＋5	17		6の倍数 －1
6の倍数	18	(2,3の倍数)	6の倍数
6の倍数 ＋1	19		6の倍数 －5
6の倍数 ＋2	20	(2の倍数)	6の倍数 －4
6の倍数 ＋3	21	(3の倍数)	6の倍数 －3
6の倍数 ＋4	22	(2の倍数)	6の倍数 －2
6の倍数 ＋5	23		6の倍数 －1
6の倍数	24	(2,3の倍数)	6の倍数

上の表をみると、
2の倍数でもなく、かつ3の倍数でもない数は、

6の倍数±1

で表せることがわかる。

そこで　$p = 6k \pm 1$（kは自然数）とおいて

Aを計算していき、Aが3の倍数となるかを調べてみよう。

(ア) $p=6k+1$, $q=2$ のとき

$$A=(6k+1)^2+2^{6k+1}=(6k+1)^2+2^{6k}\cdot 2=(6k+1)^2+2\cdot(2^6)^k=36k^2+12k+1+2\cdot 64^k$$

ここで

$$64^k=(63+1)^k=(3\cdot 21+1)^k=\underline{{}_kC_0(3\cdot 21)^k+{}_kC_1(3\cdot 21)^{k-1}\cdot 1^1+{}_kC_2(3\cdot 21)^{k-2}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_kC_{k-2}(3\cdot 21)^2\cdot 1^{k-2}+{}_kC_{k-1}(3\cdot 21)^1\cdot 1^{k-1}}+{}_kC_k1^k$$

二項定理を用いて展開

mを整数とすると、 $64^k=\underline{3m}+1$ と表せるから

$$A=36k^2+12k+1+2\cdot 64^k=3(12k^2+4k)+1+2(3m+1)=3(12k^2+4k+2m+1)$$

となって、 Aは3の倍数となっている。

(イ) $p=6k-1$, $q=2$ のとき

$$A=(6k-1)^2+2^{6k-1}=(6k-1)^2+2^{6(k-1)}\cdot 2^5=(6k-1)^2+2^5\cdot(2^6)^{k-1}=36k^2-12k+1+32\cdot 64^{k-1}$$

ここで

$$64^{k-1}=(3\cdot 21+1)^{k-1}=\underline{{}_{k-1}C_0(3\cdot 21)^{k-1}+{}_{k-1}C_1(3\cdot 21)^{k-2}\cdot 1^1+{}_{k-1}C_2(3\cdot 21)^{k-3}\cdot 1^2+\cdots\cdots+{}_{k-1}C_{k-3}(3\cdot 21)^2\cdot 1^{k-3}+{}_{k-1}C_{k-2}(3\cdot 21)^1\cdot 1^{k-2}}+{}_{k-1}C_{k-1}1^{k-1}$$

nを整数とすると $64^{k-1}=\underline{3n}+1$ と表せるから

$$A=36k^2-12k+1+32\cdot 64^{k-1}=3(12k^2-4k)+1+32(3n+1)=3(12k^2-4k+32n+11)$$

となって、 Aは3の倍数となっている。

したがって、 (ア), (イ) より $p\geq 5$ の素数のとき、Aは素数にならないので、

Aで表される素数は、17のみである。