

2

(30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ。

P, q が素数のとき

$$A = P^q + q^P \text{ とおく。}$$

素数は、2のみが偶数で、他は全て奇数である。

そこで、まず、素数 P, q を偶数、奇数で考えてみる。

P と q がともに偶数のとき、偶数素数は2のみだから、 $P = q = 2$ のとき。

$$A = 2^2 + 2^2 = 8 \text{ となる。} A \text{ は素数ではない。}$$

P と q がともに奇数のとき、「奇数の奇数乗」は奇数だから

$A = \text{奇数} + \text{奇数} = \text{偶数} \text{ となる。} 2 \text{ より大きい偶数素数は存在しないから、} A \text{ は素数ではない。}$

P, q の一方が奇数で他方が偶数のとき、「奇数の偶数乗」は奇数であり、

「偶数の奇数乗」は偶数であるから、

$A = \text{奇数} + \text{偶数} = \text{奇数} \text{ となる。} A \text{ が素数となる可能性がある。}$

そこで、 P, q の一方が奇数で他方が偶数のときを考えていけば「よいのが」

P を奇数素数とし、 q を偶数素数とする。偶数素数は2のみだから当然、 $q = 2$ とする。(P, q の対称性から、どうでもいい)。

P は3以上の素数となるので、まず、 $P = 3$ として、 A を求めてみる。

$P = 3$ のとき

$$A = 3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17 \quad A \text{ は素数である。}$$

同様に $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 7010, 7011, 7012, 7013, 7014, 7015, 7016, 7017, 7018, 7019, 7020, 7021, 7022, 7023, 7024, 7025, 7026, 7027, 7028, 7029, 70210, 70211, 70212, 70213, 70214, 70215, 70216, 70217, 70218, 70219, 70220, 70221, 70222, 70223, 70224, 70225, 70226, 70227, 70228, 70229, 70230, 70231, 70232, 70233, 70234, 70235, 70236, 70237, 70238, 70239, 70240, 70241, 70242, 70243, 70244, 70245, 70246, 70247, 70248, 70249, 70250, 70251, 70252, 70253, 70254, 70255, 70256, 70257, 70258, 70259, 70260, 70261, 70262, 70263, 70264, 70265, 70266, 70267, 70268, 70269, 70270, 70271, 70272, 70273, 70274, 70275, 70276, 70277, 70278, 70279, 70280, 70281, 70282, 70283, 70284, 70285, 70286, 70287, 70288, 70289, 70289, 70290, 70291, 70292, 70293, 70294, 70295, 70296, 70297, 70298, 70299, 702100, 702101, 702102, 702103, 702104, 702105, 702106, 702107, 702108, 702109, 702110, 702111, 702112, 702113, 702114, 702115, 702116, 702117, 702118, 702119, 7021110, 7021111, 7021112, 7021113, 7021114, 7021115, 7021116, 7021117, 7021118, 7021119, 70211110, 70211111, 70211112, 70211113, 70211114, 70211115, 70211116, 70211117, 70211118, 70211119, 702111110, 702111111, 702111112, 702111113, 702111114, 702111115, 702111116, 702111117, 702111118, 702111119, 7021111110, 7021111111, 7021111112, 7021111113, 7021111114, 7021111115, 7021111116, 7021111117, 7021111118, 7021111119, 70211111110, 70211111111, 70211111112, 70211111113, 70211111114, 70211111115, 70211111116, 70211111117, 70211111118, 70211111119, 702111111110, 702111111111, 702111111112, 702111111113, 702111111114, 702111111115, 702111111116, 702111111117, 702111111118, 702111111119, 7021111111110, 7021111111111, 7021111111112, 7021111111113, 7021111111114, 7021111111115, 7021111111116, 7021111111117, 7021111111118, 7021111111119, 70211111111110, 70211111111111, 70211111111112, 70211111111113, 70211111111114, 70211111111115, 70211111111116, 70211111111117, 70211111111118, 70211111111119, 702111111111110, 702111111111111, 702111111111112, 702111111111113, 702111111111114, 702111111111115, 702111111111116, 702111111111117, 702111111111118, 702111111111119, 7021111111111110, 7021111111111111, 7021111111111112, 7021111111111113, 7021111111111114, 7021111111111115, 7021111111111116, 7021111111111117, 7021111111111118, 7021111111111119, 70211111111111110, 70211111111111111, 70211111111111112, 70211111111111113, 70211111111111114, 70211111111111115, 70211111111111116, 70211111111111117, 70211111111111118, 70211111111111119, 702111111111111110, 702111111111111111, 702111111111111112, 702111111111111113, 702111111111111114, 702111111111111115, 702111111111111116, 702111111111111117, 702111111111111118, 702111111111111119, 7021111111111111110, 7021111111111111111, 7021111111111111112, 7021111111111111113, 7021111111111111114, 7021111111111111115, 7021111111111111116, 7021111111111111117, 7021111111111111118, 7021111111111111119, 70211111111111111110, 70211111111111111111, 70211111111111111112, 70211111111111111113, 70211111111111111114, 70211111111111111115, 70211111111111111116, 70211111111111111117, 70211111111111111118, 70211111111111111119, 702111111111111111110, 702111111111111111111, 702111111111111111112, 702111111111111111113, 702111111111111111114, 702111111111111111115, 702111111111111111116, 702111111111111111117, 702111111111111111118, 702111111111111111119, 7021111111111111111110, 7021111111111111111111, 7021111111111111111112, 7021111111111111111113, 7021111111111111111114, 7021111111111111111115, 7021111111111111111116, 7021111111111111111117, 7021111111111111111118, 7021111111111111111119, 70211111111111111111110, 70211111111111111111111, 70211111111111111111112, 70211111111111111111113, 70211111111111111111114, 70211111111111111111115, 70211111111111111111116, 70211111111111111111117, 70211111111111111111118, 70211111111111111111119, 702111111111111111111110, 702111111111111111111111, 702111111111111111111112, 702111111111111111111113, 702111111111111111111114, 702111111111111111111115, 702111111111111111111116, 702111111111111111111117, 702111111111111111111118, 702111111111111111111119, 7021111111111111111111110, 7021111111111111111111111, 7021111111111111111111112, 7021111111111111111111113, 7021111111111111111111114, 7021111111111111111111115, 7021111111111111111111116, 7021111111111111111111117, 7021111111111111111111118, 7021111111111111111111119, 70211111111111111111111110, 70211111111111111111111111, 70211111111111111111111112, 70211111111111111111111113, 70211111111111111111111114, 70211111111111111111111115, 70211111111111111111111116, 70211111111111111111111117, 70211111111111111111111118, 70211111111111111111111119, 702111111111111111111111110, 702111111111111111111111111, 702111111111111111111111112, 702111111111111111111111113, 702111111111111111111111114, 702111111111111111111111115, 702111111111111111111111116, 702111111111111111111111117, 702111111111111111111111118, 702111111111111111111111119, 7021111111111111111111111110, 7021111111111111111111111111, 7021111111111111111111111112, 7021111111111111111111111113, 7021111111111111111111111114, 7021111111111111111111111115, 7021111111111111111111111116, 7021111111111111111111111117, 7021111111111111111111111118, 7021111111111111111111111119, 70211111111111111111111111110, 70211111111111111111111111111, 70211111111111111111111111112, 70211111111111111111111111113, 70211111111111111111111111114, 70211111111111111111111111115, 70211111111111111111111111116, 70211111111111111111111111117, 70211111111111111111111111118, 70211111111111111111111111119, 702111111111111111111111111110, 702111111111111111111111111111, 702111111111111111111111111112, 702111111111111111111111111113, 702111111111111111111111111114, 702111111111111111111111111115, 702111111111111111111111111116, 702111111111111111111111111117, 702111111111111111111111111118, 702111111111111111111111111119, 7021111111111111111111111111110, 7021111111111111111111111111111, 7021111111111111111111111111112, 7021111111111111111111111111113, 7021111111111111111111111111114, 7021111111111111111111111111115, 7021111111111111111111111111116, 7021111111111111111111111111117, 7021111111111111111111111111118, 7021111111111111111111111111119, 70211111111111111111111111111110, 70211111111111111111111111111111, 70211111111111111111111111111112, 70211111111111111111111111111113, 70211111111111111111111111111114, 70211111111111111111111111111115, 70211111111111111111111111111116, 70211111111111111111111111111117, 70211111111111111111111111111118, 70211111111111111111111111111119, 702111111111111111111111111111110, 702111111111111111111111111111111, 702111111111111111111111111111112, 702111111111111111111111111111113, 702111111111111111111111111111114, 702111111111111111111111111111115, 702111111111111111111111111111116, 7021111111111111111$

さて、5以上の素数はどれも、偶数(2の倍数)でもなく、かつ3の倍数でもない。このような数は、どのように表せるか?

そこで、2の倍数があり、かつ3の倍数である数は、6の倍数だから、6の倍数を使って調べてみよう。

| 6の倍数 | 6 (2,3の倍数) | 6の倍数 |
|---------|-------------|---------|
| 6の倍数 +1 | 7 | 6の倍数 -5 |
| 6の倍数 +2 | 8 (2の倍数) | 6の倍数 -4 |
| 6の倍数 +3 | 9 (3の倍数) | 6の倍数 -3 |
| 6の倍数 +4 | 10 (2の倍数) | 6の倍数 -2 |
| 6の倍数 +5 | 11 | 6の倍数 -1 |
| 6の倍数 | 12 (2,3の倍数) | 6の倍数 |
| 6の倍数 +1 | 13 | 6の倍数 -5 |
| 6の倍数 +2 | 14 (2の倍数) | 6の倍数 -4 |
| 6の倍数 +3 | 15 (3の倍数) | 6の倍数 -3 |
| 6の倍数 +4 | 16 (2の倍数) | 6の倍数 -2 |
| 6の倍数 +5 | 17 | 6の倍数 -1 |
| 6の倍数 | 18 (2,3の倍数) | 6の倍数 |
| 6の倍数 +1 | 19 | 6の倍数 -5 |
| 6の倍数 +2 | 20 (2の倍数) | 6の倍数 -4 |
| 6の倍数 +3 | 21 (3の倍数) | 6の倍数 -3 |
| 6の倍数 +4 | 22 (2の倍数) | 6の倍数 -2 |
| 6の倍数 +5 | 23 | 6の倍数 -1 |
| 6の倍数 | 24 (2,3の倍数) | 6の倍数 |

上の表をみると、

2の倍数でもなく、かつ3の倍数でもない数は、

$6 \text{の倍数} \pm 1$

で表せることがわかる。

そこで $P = 6n \pm 1$ (n は自然数) とおいて

Aを計算していき、Aが3の倍数となるかを調べてみよう。

(ア) $P = 6k + 1$, $q = 2$ のとき

$$A = (6k+1)^2 + 2^{6k+1} = (6k+1)^2 + 2^{6k} \cdot 2 = (6k+1)^2 + 2 \cdot (2^6)^k = 36k^2 + 12k + 1 + 2 \cdot 64^k$$

ここで

$$64^k = (63+1)^k = (3 \cdot 21 + 1)^k = \underbrace{C_{k,0}(3 \cdot 21)^k + C_{k,1}(3 \cdot 21)^{k-1} \cdot 1 + C_{k,2}(3 \cdot 21)^{k-2} \cdot 1^2 + \dots + C_{k,k-2}(3 \cdot 21)^2 \cdot 1^{k-2} + C_{k,k-1}(3 \cdot 21)^1 \cdot 1^{k-1} + C_{k,k}(3 \cdot 21)^0 \cdot 1^k}_{\text{二項定理を用いて展開}}$$

m を整数とすと、 $64^k = \underline{3m+1}$ と表せよから

$$A = 36k^2 + 12k + 1 + 2 \cdot 64^k = 3(12k^2 + 4k) + 1 + 2(3m+1) = 3(12k^2 + 4k + 2m + 1)$$

となる、 A は 3 の倍数となっている。

(イ) $P = 6k - 1$, $q = 2$ のとき

$$A = (6k-1)^2 + 2^{6k-1} = (6k-1)^2 + 2^{6(k-1)} \cdot 2^5 = (6k-1)^2 + 2^5 \cdot (2^6)^{k-1} = 36k^2 - 12k + 1 + 32 \cdot 64^{k-1}$$

ここで

$$64^{k-1} = (3 \cdot 21 + 1)^{k-1} = \underbrace{C_{k-1,0}(3 \cdot 21)^{k-1} + C_{k-1,1}(3 \cdot 21)^{k-2} \cdot 1 + C_{k-1,2}(3 \cdot 21)^{k-3} \cdot 1^2 + \dots + C_{k-1,k-3}(3 \cdot 21)^2 \cdot 1^{k-3} + C_{k-1,k-2}(3 \cdot 21)^1 \cdot 1^{k-2} + C_{k-1,k-1}(3 \cdot 21)^0 \cdot 1^{k-1}}_{\text{二項定理を用いて展開}}$$

n を整数とすと $64^{k-1} = \underline{3n+1}$ と表せよから

$$A = 36k^2 - 12k + 1 + 32 \cdot 64^{k-1} = 3(12k^2 - 4k) + 1 + 32(3n+1) = 3(12k^2 - 4k + 32n + 11)$$

となる、 A は 3 の倍数となっている。

(したがって) (ア), (イ) より $P \geq 5$ の素数のとき、 A は素数にならないので、

A で表される素数は、17 のみである。

二項定理
を用いて
展開