3

(35点)

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ.

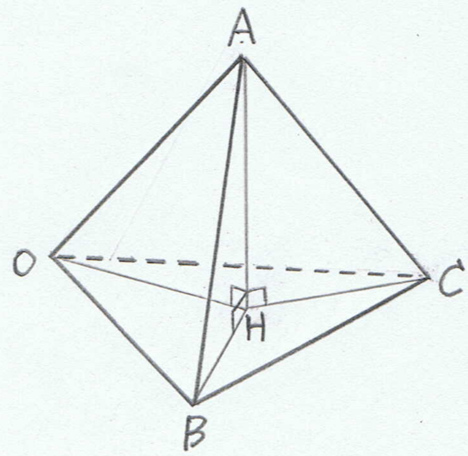
条件：頂点 A,B,C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は

対面の外心を通る.

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の３つの頂点がなす三角形のことをいう.

三角形の合同の証明を用いる。

頂点Aから対面OBCに下ろした垂線の足をHとする。このとき△AOH, △ABH, △ACH において、



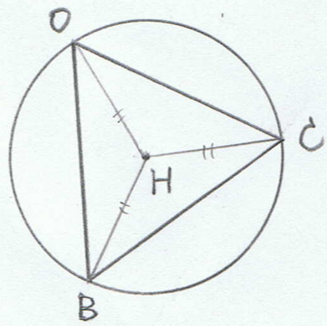
点Hは△OBCの外心だから

$OH = BH = CH$

また、$AH \perp OH$, $AH \perp BH$, $AH \perp CH$ だから

$\angle AHO = \angle AHB = \angle AHC = \angle R$

そしてAHは共通であるから、



2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△AOH ≡ △ABH ≡ △ACH　である。

合同な図形の対応する辺は等しいから

$AO = AB = AC$ ------①

また、頂点Bから対面OACに垂線を下ろすことにより、同様にして

$BO = BA = BC$ ------②

が導かれる。

さらに、頂点Cから対面OABに垂線を下ろすことにより、同様にして

$CO = CA = CB$ ------③

が導かれる。

したがって ①,②,③ より

$OA = OB = OC = AB = BC = CA$

となるので、四面体OABCは正四面体である。