$\boxed{\mathbf{4}}$ (35 点)

$xyz$ 空間において，平面 $y=z$ の中で

$$|x| \leqq \frac{e^y+e^{-y}}{2}-1, \qquad 0 \leqq y \leqq \log a$$

で与えられる図形 $D$ を考える．ただし $a$ は 1 より大きい定数とする．

この図形 $D$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

まず、**$xy$平面上**で

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log a \ (a>1)$$

の表す領域を求めてみる。

$$|x| \leqq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1 \text{ ------- ①}$$

$|x| \leqq 3 \iff -3 \leqq x \leqq 3$

つまり　$-\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + 1 \leqq x \leqq \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - 1$

の表す領域を見つける。　そこで、はじめに

関数 $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ のグラフを考える。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$\dfrac{dx}{dy} = 0$ とすると　$\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = 0 \to e^y - e^{-y} = 0 \to e^y = e^{-y} \to e^y = \dfrac{1}{e^y} \to (e^y)^2 = 1$

$\to e^{2y} = 1 \to 2y = 0 \to \therefore y = 0$

$x$の増減表をつくると、

| $y$ | $y<0$ | $0$ | $0<y$ |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{dx}{dy}$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | 減少 | $1$ | 増加 |

$y<0$のとき

例えば $y=-1$のとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) < 0$$

$y>0$のとき

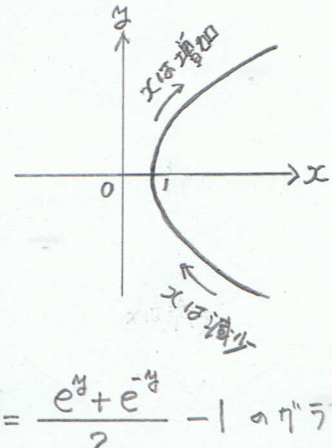
例えば $y=1$のとき

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) > 0$$

$y=0$のとき

$$x = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

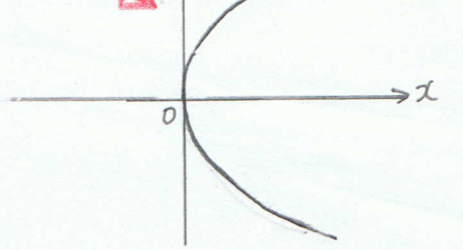
よって、グラフは




すると　関数 $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - 1$ のグラフは $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$ のグラフを

$x$軸方向に$-1$だけ平行移動したものだから

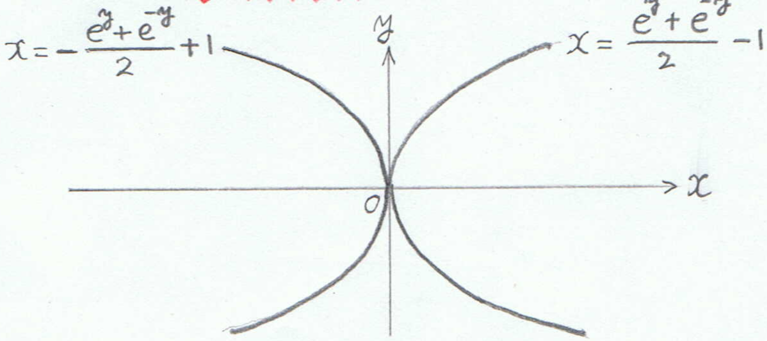
右図のようになる。



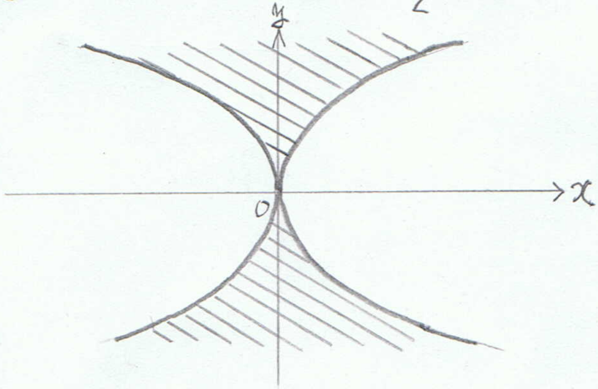
次に、関数 $x=-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}+1$ のグラフが欲しいのだが、

これは $x=-\left(\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1\right)=-\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}+1$ となっているのだから

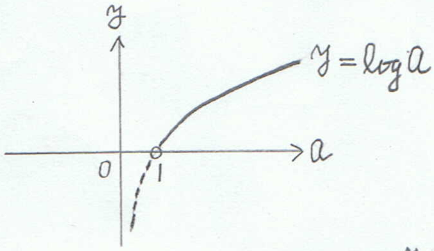
$y$ 軸に関して $x=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$ と対称なグラフをかけばよいことがわかる。




すると、①の不等式 $|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$ の表す領域は、下図のようになる。




そしてさらに、$0\leqq y\leqq\log a$ $(a>1)$ という条件がついている。




関数 $y=\log a$ のグラフは左図のようになり、

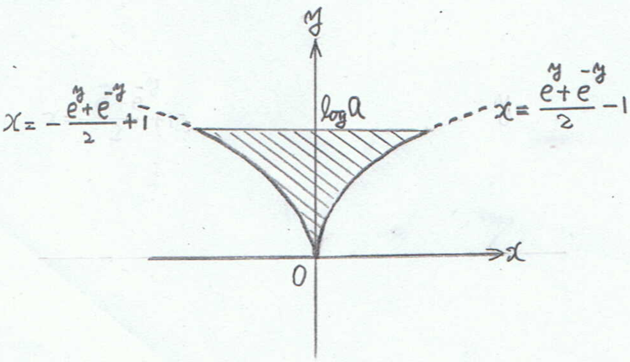
$a>1$ のときは実線部となるから、

$a>1$ のとき $\log a>0$ となっている。

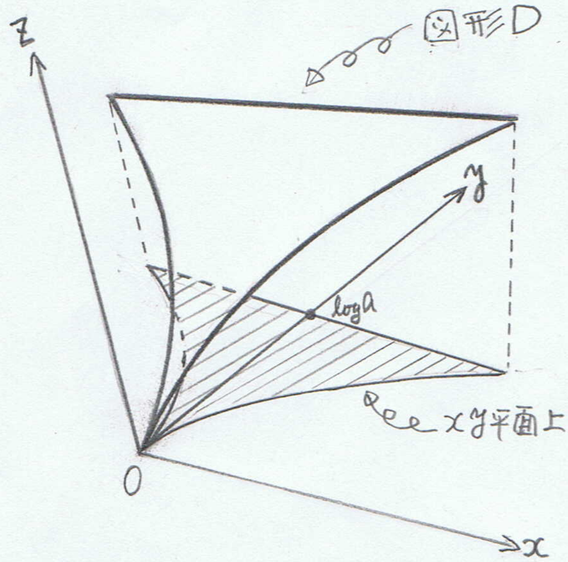
したがって、$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$, $0\leqq y\leqq\log a$ $(a>1)$ の表す領域は

左図の斜線部分となる。

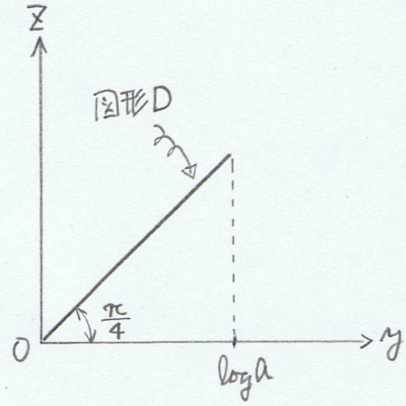
(境界線を含む。)



次に、xy平面上での領域を、平面y=z上に写す。




⟸ x軸方向から見ると右図のようになる。




図形Dをy軸のまわりに回転させたときの体積の求め方を確認

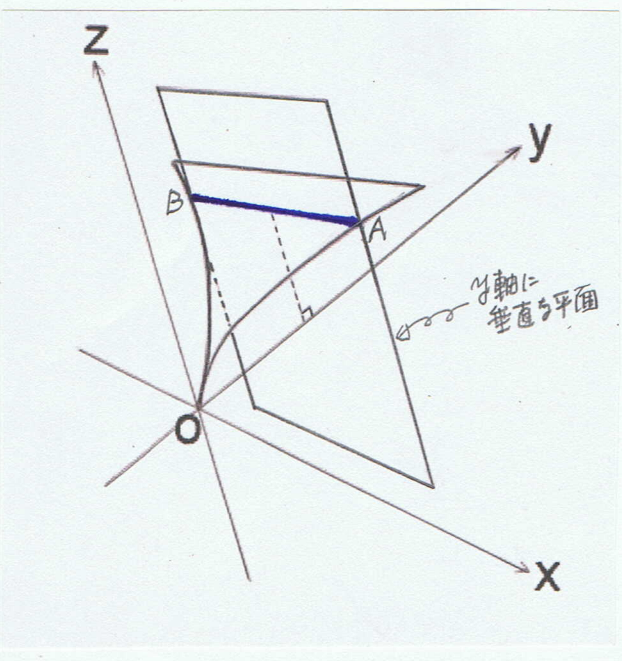
回転体の体積は、回転軸(ここではy軸)に垂直な平面で切ったときの切り口の断面積をyで積分すると求めることができる。

$$体積\ V = \int_\alpha^\beta 断面積\,dy$$

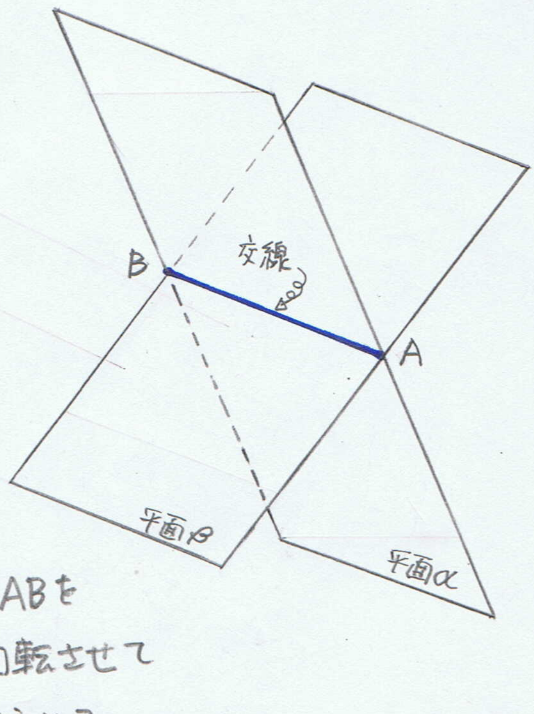
そして、回転体は切り口の断面は円となっているから、円の半径がわかれば、断面積を求めることができる。

円の半径を求める作業をする。

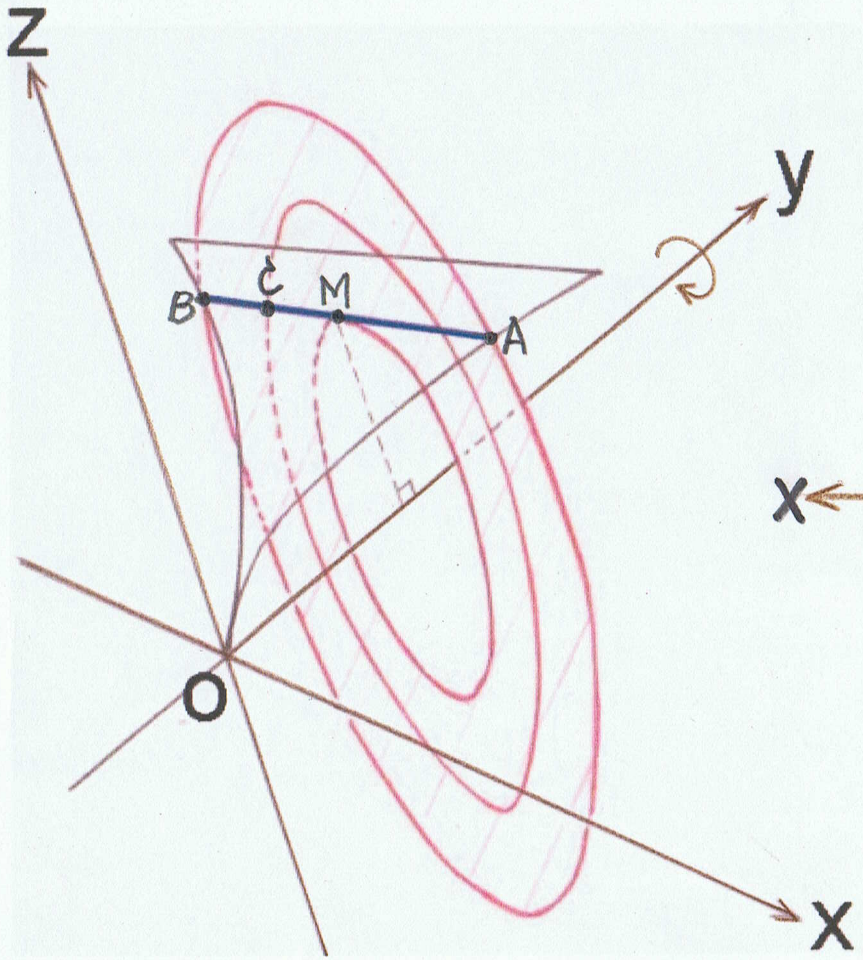
図形Dを、y軸に垂直な平面で切ってみる。

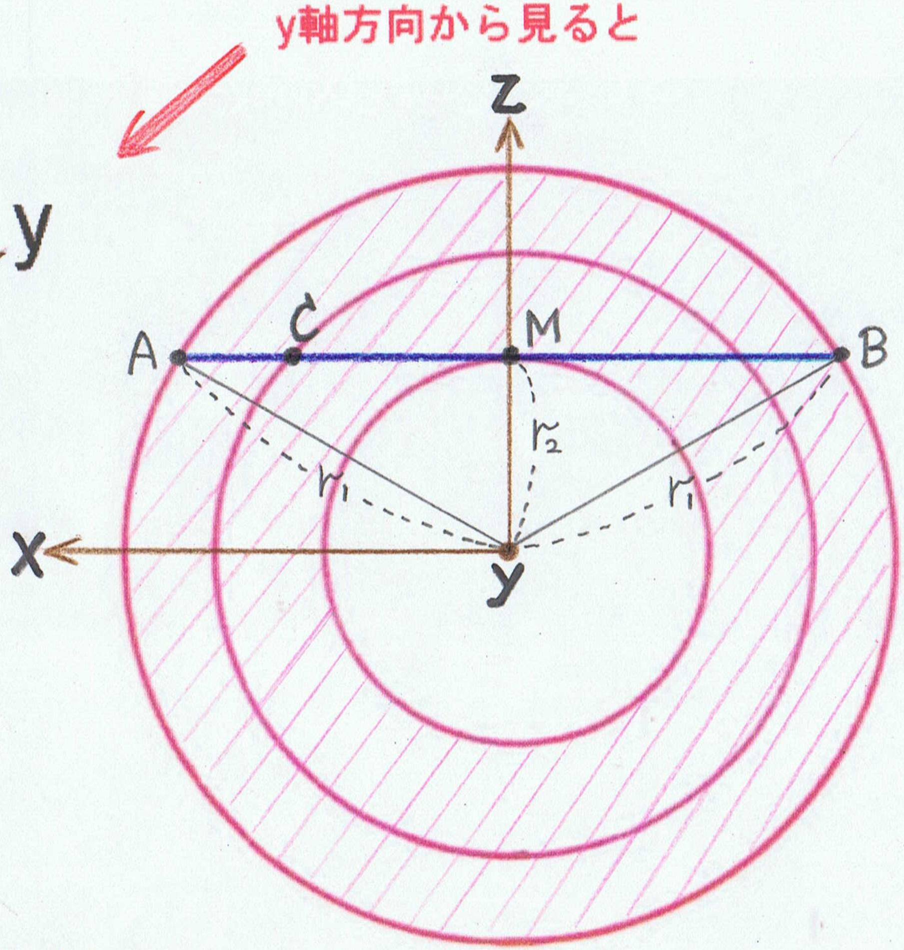



2つの平面は交線ABで交わる。




そして、この交線ABをy軸の周りに回転させて断面の半径を求める。



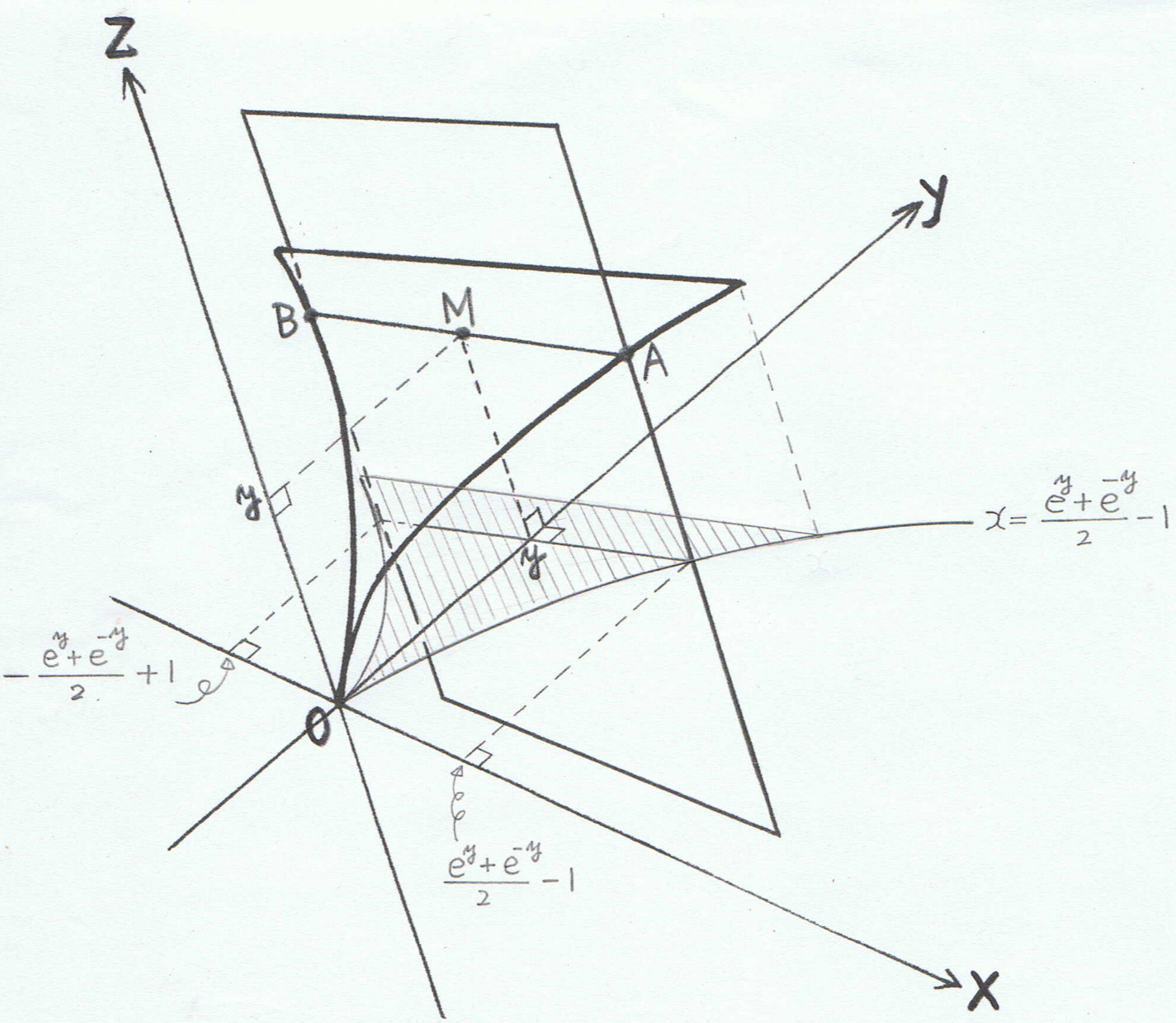




交線AB上に、点C，中点Mをとる。

交線ABをy軸の周りに回転させて、y軸方向から見ると
y軸から一番遠い所にある点がAとBで、y軸から
一番近い所にある点が中点Mだということがわかる。
ここで，点A，Bの回転半径を$r_1$，中点Mの回転半径を
$r_2$としておく。

回転半径 $r_1$, $r_2$ を求める準備として、点A, B, Mの座標を確認する。

点A, B, Mの $y$ 座標を $y$ とする。

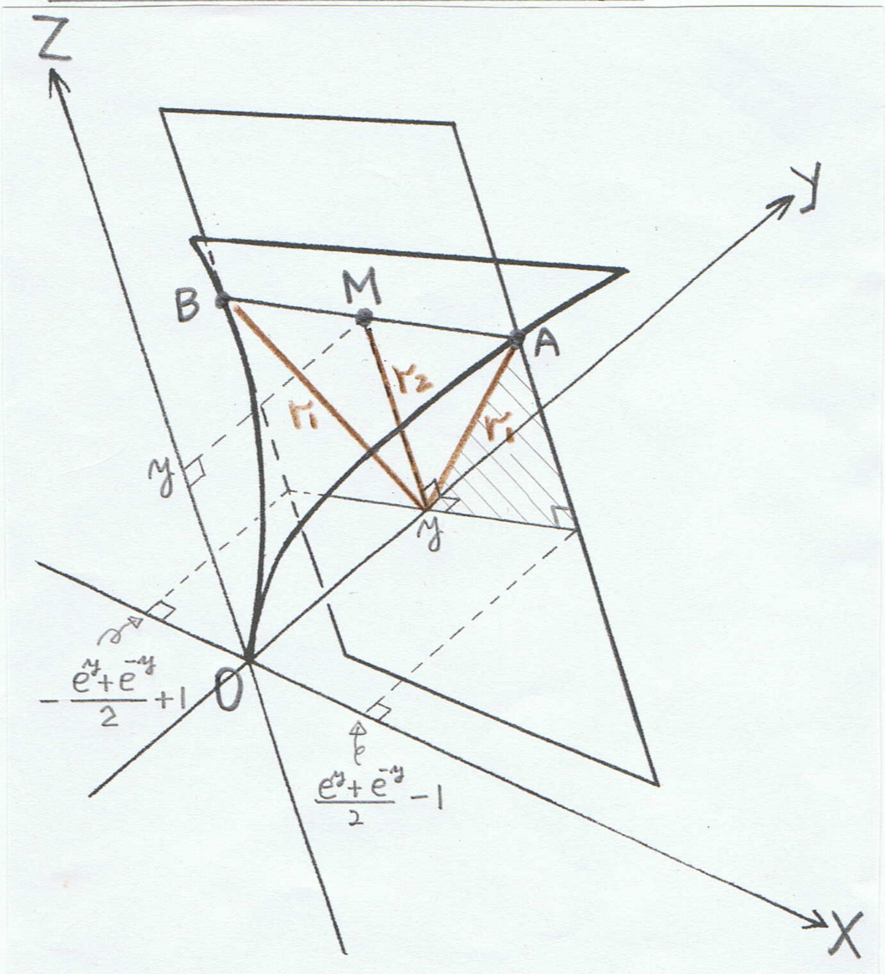



点Aの $x$ 座標は $\frac{e^y+e^{-y}}{2}-1$

点Bの $x$ 座標は $-\frac{e^y+e^{-y}}{2}+1$

点A, B, Mの $z$ 座標は $y$ 座標と同じく $y$ となっている。

## 半径 $r_1$, $r_2$ を求める。

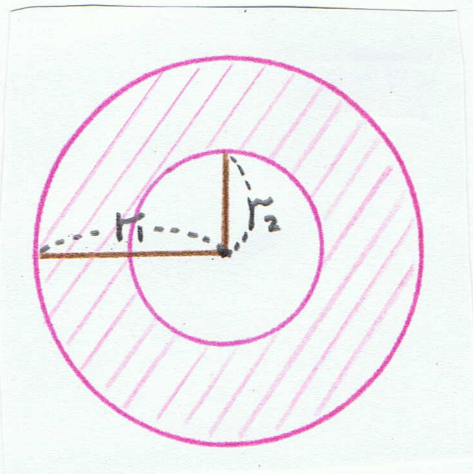



点Aのx座標とz座標に三平方の定理をあてはめると

$$r_1^2=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}-1\right)^2+y^2$$

点Mはx座標が0でz座標がyだから

$$r_2^2=y^2$$




## ドーナツ型の断面積を求める。

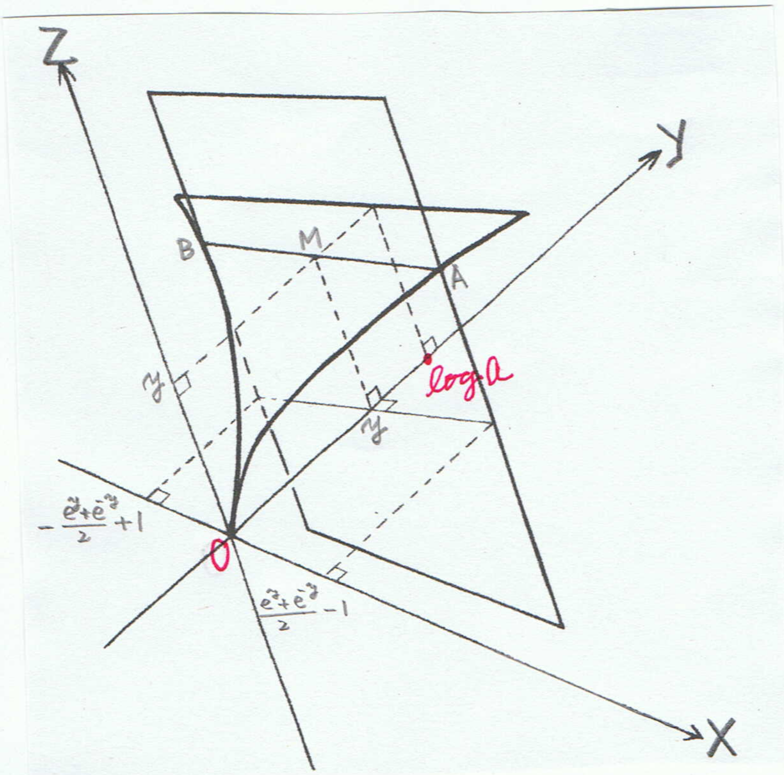
$$
\begin{aligned}
\text{断面積 } S &= \pi r_1^2-\pi r_2^2=\pi(r_1^2-r_2^2)\\
&=\pi\left\{\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}-1\right)^2+y^2-y^2\right\}\\
&=\pi\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}-1\right)^2\\
&=\pi\left\{\frac{(e^y+e^{-y})^2}{4}-(e^y+e^{-y})+1\right\}\\
&=\frac{\pi}{4}\left\{(e^y+e^{-y})^2-4(e^y+e^{-y})+4\right\}\\
&=\frac{\pi}{4}\left(e^{2y}+2\cdot e^y\cdot e^{-y}+e^{-2y}-4e^y-4e^{-y}+4\right)\\
&=\frac{\pi}{4}\left(e^{2y}+e^{-2y}-4e^y-4e^{-y}+6\right)
\end{aligned}
$$

平方の公式で展開

$\frac{1}{4}$のくくり出し

$e^y\cdot e^{-y}=e^y\cdot\frac{1}{e^y}=1$

断面積をyで積分して、体積を求める。




$$\text{体積}\ V=\int_0^{\log a} S\,dy=\int_0^{\log a}\frac{\pi}{4}\left(e^{2y}+e^{-2y}-4e^{y}-4e^{-y}+6\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}\left(e^{2y}+e^{-2y}-4e^{y}-4e^{-y}+6\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2y}}{2}-\frac{e^{-2y}}{2}-4e^{y}+4e^{-y}+6y\right]_0^{\log a}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{e^{2\log a}}{2}-\frac{e^{-2\log a}}{2}-4e^{\log a}+4e^{-\log a}+6\log a-\left(\frac{e^{0}}{2}-\frac{e^{0}}{2}-4e^{0}+4e^{0}+6\times 0\right)\right\}$$

対数の性質

$p\log_e M=\log_e M^p$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{e^{\log a^{2}}}{2}-\frac{e^{\log a^{-2}}}{2}-4e^{\log a}+4e^{\log a^{-1}}+6\log a-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-4+4+0\right)\right\}$$

対数の性質

$e^{\log_e M}=M$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^{2}}{2}-\frac{a^{-2}}{2}-4a+4a^{-1}+6\log a\right)$$

$$=\pi\left(\frac{a^{2}}{8}-\frac{a^{-2}}{8}-a+a^{-1}+\frac{6}{4}\log a\right)$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{8}\left(a^{2}-a^{-2}\right)-\left(a-a^{-1}\right)+\frac{3}{2}\log a\right\}$$