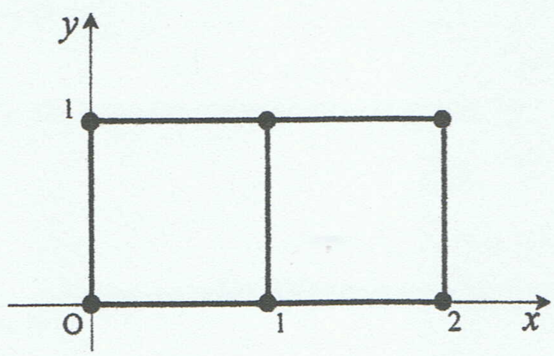
5 (35 点)

xy 平面上の 6 個の点 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている．動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する．

規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する．

例えば，X が $(2,0)$ にいるときは，$(1,0),(2,1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．また X が $(1,1)$ にいるときは，$(0,1),(1,0),(2,1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する．

時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O}=(0,0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ．ただし n は 0 以上の整数とする．



確率の漸化式を作っていく。

n 秒後に動点 X の x 座標が

　0 となる（X が $(0,0)$ または $(0,1)$ にいる）確率を p_n，

　1 となる（X が $(1,0)$ または $(1,1)$ にいる）確率を q_n，

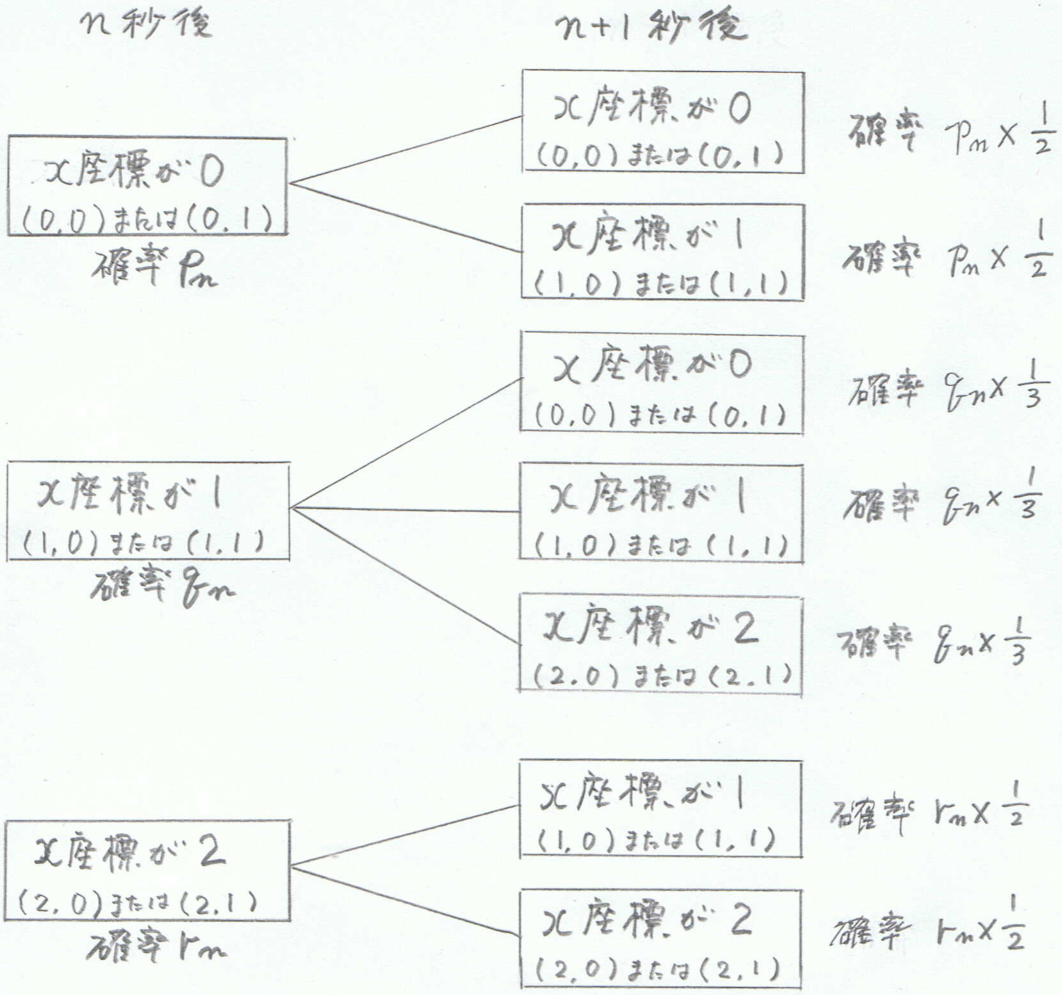
　2 となる（X が $(2,0)$ または $(2,1)$ にいる）確率を r_n

とすると，$p_n + q_n + r_n = 1$

また，$n=0$ で動点 X が $(0,0)$ から出発するので

$$\begin{cases} p_0 = 1, \\ q_0 = 0, \\ r_0 = 0 \end{cases}$$ である。

動点 X の n 秒後から $n+1$ 秒後の移動は，次のようになる。



すると，$n+1$ 秒後に動点 X の x 座標が

　0 となる（X が $(0,0)$ または $(0,1)$ にいる）確率は　$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n$

　1 となる（X が $(1,0)$ または $(1,1)$ にいる）確率は　$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n$

　2 となる（X が $(2,0)$ または $(2,1)$ にいる）確率は　$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n$

となる。

ここまでの式をまとめて書くと

$$p_n + q_n + r_n = 1 \quad \text{------} ①$$

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{------} ②$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n \quad \text{----} ③$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \text{----} ④$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \text{----} ⑤$$

これらの式は確率に関しての漸化式である。

そこで、数列の漸化式と同様の方法で、p_nを求める作業をする。

④より $q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + r_n) + \frac{1}{3}q_n$

④は $q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + r_n) + \frac{1}{3}q_n$ となり
ここに①を使うと qだけの式となる。

①より $p_n + r_n = 1 - q_n$ だから

$q_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - q_n) + \frac{1}{3}q_n$ となる。

つまり $$q_{n+1} = -\frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2} \quad \text{----} ㋐$$

この式に対して $$\alpha = -\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{2} \quad \text{----} ㋑$$

となる数αを考えると、㋐−㋑から次の等式が得られる。

$$q_{n+1} - \alpha = -\frac{1}{6}(q_n - \alpha) \quad \text{----} ㋒$$

㋑を解くと

$$\alpha + \frac{1}{6}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{6}\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{3}{7}$$

(初項)
第0項 第1項 第2項 第n項

$$q_0 - \frac{3}{7} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{6})} q_1 - \frac{3}{7} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{6})} q_2 - \frac{3}{7} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{6})} \cdots\cdots \xrightarrow{\times(-\frac{1}{6})} q_n - \frac{3}{7}, \cdots$$

したがって㋒は

$$q_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(q_n - \frac{3}{7}\right)$$

となる。

②より

これは 初項 $q_0 - \frac{3}{7} = 0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$

公比 $-\frac{1}{6}$

の等比数列である。

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ だから n乗

第n項は $$q_n - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって $q_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ ---------- ⑥

また、③−⑤より

$$
\begin{array}{rrrr}
 & p_{n+1} = & \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n & \\
-) & r_{n+1} = & \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n & \\
\hline
\end{array}
$$

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n - \frac{1}{2}r_n$$

$$p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$$

これは

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\text{(初項)第0項} & & \text{第1項} & & \text{第2項} & & \text{第3項} & & \text{第}n\text{項} \\
p_0 - r_0 & \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} & p_1 - r_1 & \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} & p_2 - r_2 & \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} & p_3 - r_3 & \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \cdots\cdots \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} & p_n - r_n, \cdots
\end{array}
$$

となっていて、

初項 $p_0 - r_0 = 1 - 0 = 1$ ← ②より

公比 $\frac{1}{2}$

の等比数列だから、第n項は

$$p_n - r_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ ---------- ⑦

ここで ①と⑥から

$$p_n + r_n = 1 - q_n = 1 - \left\{\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$ ----- ⑧

そこで $\dfrac{⑦ + ⑧}{2}$ より

$$p_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$= \frac{2}{7} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$