$\boxed{6}$ (35点)

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し，次の条件を考える．

（イ） $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる．

（ロ） $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である．

この 2 つの条件（イ），（ロ）を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ．

$f(x)=x^2+ax+b$ より $f(x^3)=x^6+ax^3+b$ となる。

$f(x^3)$ を $f(x)$ で割ると割り切れるのだから

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4-ax^3+(a^2-b)x^2+(-a^3+2ab+a)x+(a^4-3a^2b-a^2+b^2) \\ \hline
x^2+ax+b\ \big) & x^6 \qquad\qquad +ax^3 \qquad\qquad\qquad +b \\
 & \underline{x^6+ax^5+bx^4} \\
 & -ax^5-bx^4+ax^3 \\
 & \underline{-ax^5-a^2x^4-abx^3} \\
 & (a^2-b)x^4+(a+ab)x^3 \\
 & \underline{(a^2-b)x^4+a(a^2-b)x^3+b(a^2-b)x^2} \\
 & (-a^3+2ab+a)x^3-b(a^2-b)x^2 \\
 & \underline{(-a^3+2ab+a)x^3+a(-a^3+2ab+a)x^2+b(-a^3+2ab+a)x} \\
 & (a^4-3a^2b-a^2+b^2)x^2-b(-a^3+2ab+a)x+b \\
 & \underline{(a^4-3a^2b-a^2+b^2)x^2+a(a^4-3a^2b-a^2+b^2)x+b(a^4-3a^2b-a^2+b^2)} \\
 & (-a^5+4a^3b-3ab^2+a^3-ab)x+(-a^4b+3a^2b^2+a^2b-b^3+b)
\end{array}
$$

$-a^5+4a^3b-3ab^2+a^3-ab=0$ かつ $-a^4b+3a^2b^2+a^2b-b^3+b=0$

整頓すると

$$
\begin{cases}
a(a^4-4a^2b-a^2+3b^2+b)=0 & \cdots\cdots ① \\
b(a^4-3a^2b-a^2+b^2-1)=0 & \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

この連立方程式を解いて、条件をみたす a, b の値を求めていけばよい。

そこで、まず ① より $a=0$

または

$a^4-4a^2b-a^2+3b^2+b=0$ ---- ①′

$a=0$ のとき ② は $b(0-0-0+b^2-1)=0$

$b(b^2-1)=0$

$\therefore b=0,\ \pm1$

これは条件(ロ)に反し、不適。

次に ②より $b=0$
または
$a^4-3a^2b-a^2+b^2-1=0$ ---- ②′

$b=0$のとき ①は $a(a^4-0-a^2+0+0)=0$
$a(a^4-a^2)=0$
$a^3(a^2-1)=0$
$\therefore\ a=0,\ \pm1$
これは 条件(ロ)に反し、不適。

したがって、$a\neq0$, かつ $b\neq0$ となる。

次に ①′−②′より

$$\begin{array}{rl} & a^4-4a^2b-a^2+3b^2+b=0 \\ -) & a^4-3a^2b-a^2+b^2-1=0 \\ \hline & -a^2b\qquad +2b^2+b+1=0 \end{array}$$

$\therefore\ a^2b=2b^2+b+1$ ---- ③

③を使って、①′または②′を1文字だけの式に変えていけばよい。

そこで、②′にa^2bを作ってみる。

②′の両辺にb^2をかけると

$a^4b^2-3a^2b^3-a^2b^2+b^4-b^2=0$
$(a^2b)^2-3a^2b\cdot b^2-a^2b\cdot b+b^4-b^2=0$

ここで a^2b に $2b^2+b+1$ を代入すると

$(2b^2+b+1)^2-3(2b^2+b+1)b^2-(2b^2+b+1)b+b^4-b^2=0$

全て b 1文字だけの式になったので、bの値が出てくる。

整頓していくと、

$4b^4+b^2+1+4b^3+2b+4b^2-6b^4-3b^3-3b^2-2b^3-b^2-b+b^4-b^2=0$
$-b^4-b^3+b+1=0$
$b^4+b^3-b-1=0$
$b^3(b+1)-(b+1)=0$
$(b+1)(b^3-1)=0$
$(b+1)(b-1)(b^2+b+1)=0$
よって $b+1=0,\ b-1=0,\ b^2+b+1=0$
$\therefore\ b=-1,\ 1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$b=-1$のとき ③より $-a^2=2-1+1$
$a^2=-2$
$\therefore\ a=\pm\sqrt{2}i$

$b=1$のとき ③より $a^2=2+1+1$
$a^2=4$
$\therefore\ a=\pm2$
これは 条件(ロ)に反し、不適。

$b=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき　$b^2+b+1=0$ だから

③より　$a^2b=b^2+b^2+b+1$

$a^2b=b^2$

両辺を $b\ (\neq 0)$ で割ると

$a^2=b$

つまり

$a^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ここで右辺を極形式で表して、この方程式を解いていく。

$a^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

$a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

ド・モアブルの定理を左辺に使うと

$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

よって，$r^2=1$，$r>0$ より　$r=1$

また　$2\theta=\frac{2}{3}\pi+2\pi\times k$　(kは整数) より

$\theta=\frac{\pi}{3}+\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると　$k=0,1$ だから

$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

したがって

$a=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$b=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき　やはり $b^2+b+1=0$ だから　同様に $a^2=b$ となり

$a^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

$a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$

よって $r=1$，　$2\theta=\frac{4}{3}\pi+2\pi\times k$　(kは整数)

$\theta=\frac{2}{3}\pi+\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると　$k=0,1$ だから　$\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

したがって　$a=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ゆえに　(イ), (ロ) を同時にみたす2次式は

$$f(x) = x^2 \pm \sqrt{2}ix - 1,$$

$$x^2 \pm \frac{1+\sqrt{3}i}{2}x + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^2 \pm \frac{1-\sqrt{3}i}{2}x + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$