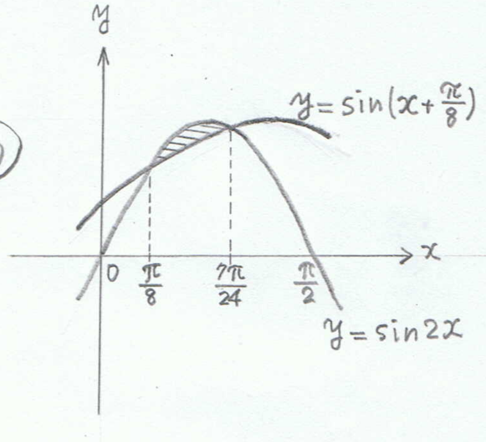
$\boxed{1}$ (30 点)

2 つの関数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$$\begin{cases} y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \\ y = \sin 2x \end{cases}$$



まず交点の x 座標を求める。

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin 2x$ より

$x + \frac{\pi}{8} = 2x$ または $x + \frac{\pi}{8} = \pi - 2x$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{8},\ \frac{7\pi}{24}$ 　これらは $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす。

右図より，求める体積を V とすると

$$V = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \pi \sin^2 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \pi \sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \left\{\sin^2 2x - \sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx$$

半角公式

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \left\{\frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)}{2}\right\}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}} \left\{-\cos 4x + \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{24}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{-\frac{1}{4}\sin\frac{7\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{\pi}{16}$$