$\boxed{1}$ (30 点)

直線 $y = px + q$ が，$y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが，$y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し，その面積を求めよ．

まず　$y=px+q$ と $y=x^2-x$ のグラフが交わるのだから

$$px+q=x^2-x$$

$$x^2-(p+1)x-q=0$$

この2次方程式の解が実数解になる必要あり.

判別式 $\geqq 0$ より

$$\{-(p+1)\}^2-4\times1\times(-q)\geqq0$$

$$(p+1)^2+4q\geqq0$$

$$\therefore\quad q\geqq-\frac{1}{4}(p+1)^2 \quad\text{-------------- ①}$$

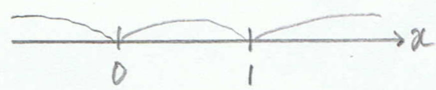
> 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ の判別式は $D=b^2-4ac$
>
> $D>0 \iff$ 異なる2つの実数解
>
> $D=0 \iff$ 重解
>
> $D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解

次に　$y=px+q$ と $y=|x|+|x-1|+1$ のグラフが交わらないのだから、

$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフをかいて、交わらない条件をさがしてみる。

$$|x|=\begin{cases}x & (x\geqq0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & (x\geqq1)\\ -(x-1) & (x<1)\end{cases}$$



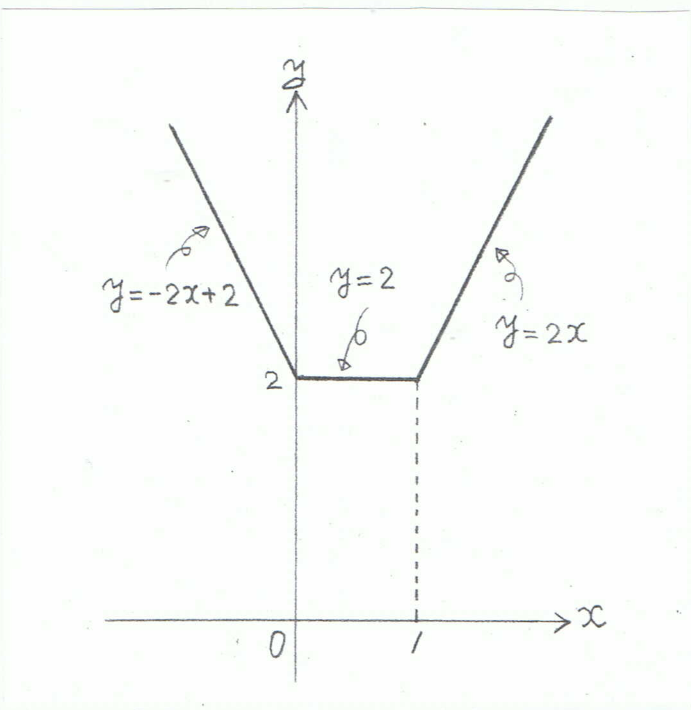
だから

$x<0$ のとき　$y=-x-(x-1)+1=-2x+2$

$0\leqq x<1$ のとき　$y=x-(x-1)+1=2$

$1\leqq x$ のとき　$y=x+x-1+1=2x$

すると　$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフは次のようになる。

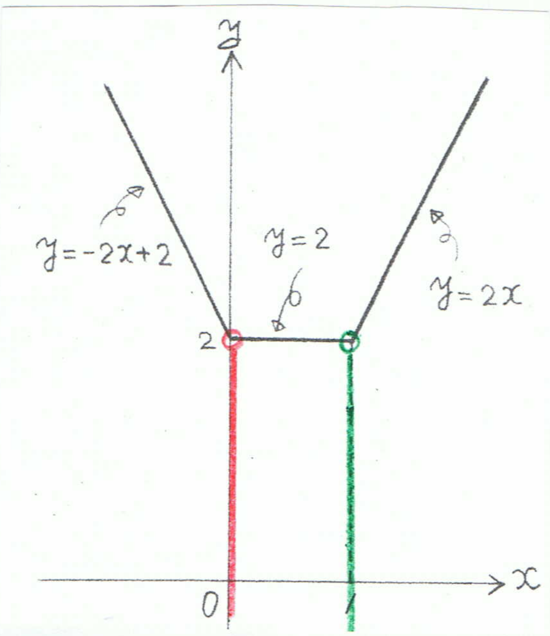


ここで $f(x)=px+q$ とおいて、交わらないときの p, q の条件をさがしてみる。

直線 $f(x)$ が3本の直線（正確には半直線、線分）

$$\begin{cases} \text{(i)}\ y=2x & (\text{傾き}>0) \\ \text{(ii)}\ y=2 & (\text{傾き}=0) \\ \text{(iii)}\ y=-2x+2 & (\text{傾き}<0) \end{cases}$$

と交わらないようにするのだから、1本ずつ考える。



(i) 直線 $f(x)$ の傾き >0 で、半直線 $y=2x$ と交わらない。

$f(1)<2$ で、かつ $0<p\leqq 2$ のとき。

※ $f(1)>2$ で、かつ $2\leqq p$ のときも半直線 $y=2x$ と交わらないが、線分 $y=2$ と交わってしまう。

(ii) 直線 $f(x)$ の傾き $=0$ で、線分 $y=2$ と交わらない。

$f(1)<2$ で、かつ $p=0$ のとき。

（または次の条件でも良い。
$f(0)<2$ で、かつ $p=0$ のとき。）

(iii) 直線 $f(x)$ の傾き <0 で、半直線 $y=-2x+2$ と交わらない。

$f(0)<2$ で、かつ $-2\leqq p<0$ のとき。

※ $f(0)>2$ で、かつ $p\leqq -2$ のときも半直線 $y=-2x+2$ と交わらないが、線分 $y=2$ と交わってしまう。

そこで、(i) と (ii) をまとめてみると、

$f(1)<2$ かつ $0\leqq p\leqq 2$ となり、

ここで $f(1)=p+q<2$ だから、

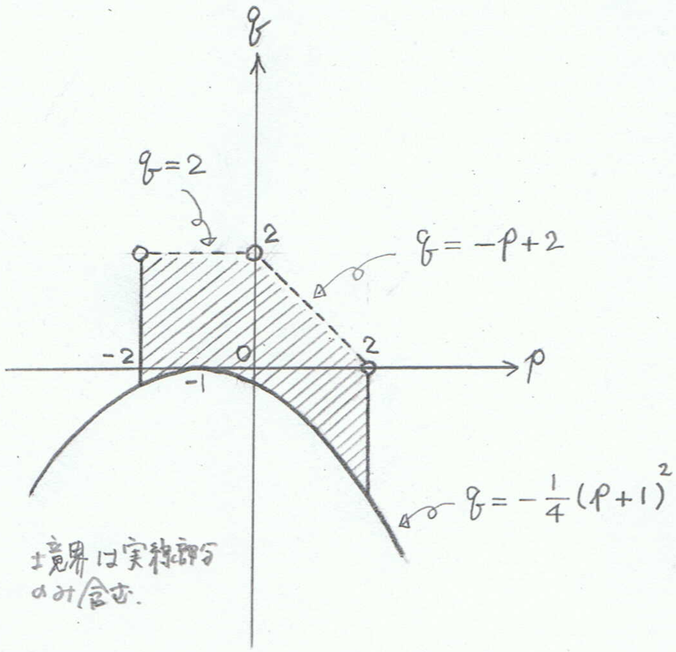
$0\leqq p\leqq 2$ かつ $q<-p+2$ -------- ②

(iii) より

$f(0)=q<2$ だから

$-2\leqq p<0$ かつ $q<2$ ---------- ③

したがって　求める(p, q)の範囲は，①,②,③の全てに含まれる領域であるから，下図の斜線部となる。



求める面積Sは

$$S = \underbrace{2\times 2}_{\text{正方形}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times 2\times 2}_{\text{三角形}} + \int_{-2}^{2}\left\{0-\left(-\frac{1}{4}(p+1)^2\right)\right\}dx$$

$$= 6 + \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(p^2+2p+1)\,dx$$

$$= 6 + \frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{3}p^3+p^2+p\right]_{-2}^{2}$$

$$= 6 + \frac{1}{4}\times\left\{\frac{8}{3}+4+2-\left(-\frac{8}{3}+4-2\right)\right\}$$

$$= 6 + \frac{1}{4}\times\frac{28}{3}$$

$$= \frac{25}{3}$$