$\boxed{2}$ (30 点)

次の２つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ．

(a) 少なくとも２つの内角は 90° である．

(b) 半径 1 の円が内接する．ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の４つの辺すべてに接することをいう．

右図(ア)において

$\angle AOP = \angle AOS = \theta \ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$

とおくと、

$\angle BOP = \angle BOQ = 90^\circ - \theta$ となる。

同様に(イ)において

$\angle DOR = \angle DOS = \theta \ (0^\circ < \theta < 90^\circ)$

とおくと

$\angle BOP = \angle BOQ = 90^\circ - \theta$ となる。

すると四角形ABCDの面積Sは

(ア),(イ)共に

$$S = 1^2 + 1^2 + \frac{1 \times \tan\theta}{2} \times 2 + \frac{1 \times \tan(90^\circ - \theta)}{2} \times 2$$

$$= 2 + \tan\theta + \tan(90^\circ - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

ここで $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\tan\theta > 0$ だから

相加平均と相乗平均の関係より

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2\sqrt{\tan\theta \times \frac{1}{\tan\theta}}$$

つまり

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2$$

であるから

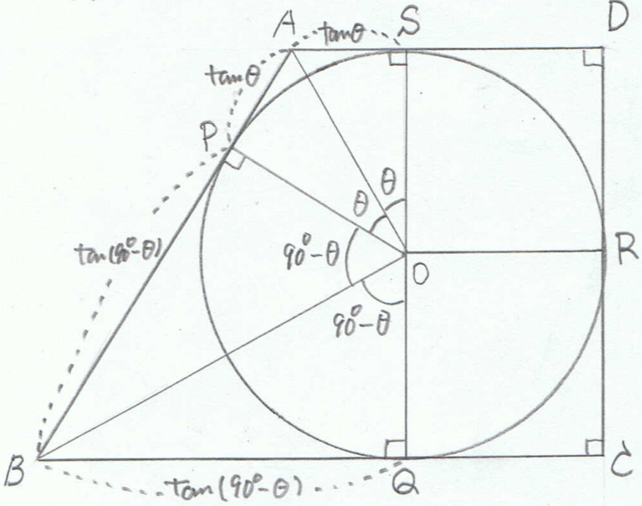
$$S = 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2 + 2$$

$$\therefore\ S \geqq 4$$

等号成立は $\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ だから $\theta = 45^\circ$ のとき。

したがって 四角形の面積の最小値は 4 となる。

(ア) 90°の内角が隣り合う場合



(イ) 90°の内角が向かい合う場合