3 (35 点)

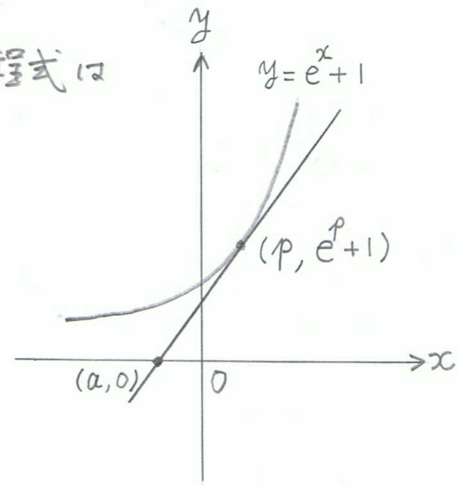
(1) a を実数とするとき，$(a, 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ．

(2) $a_1 = 1$ として，$n = 1, 2, \ldots$ について，$(a_n, 0)$ を通り，$y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき，$\lim_{n \to \infty}(a_{n+1} - a_n)$ を求めよ．

(1) $y=e^x+1$ より $y'=e^x$

$y=e^x+1$ 上の点 $(p,\ e^p+1)$ における接線の方程式は

$y-(e^p+1)=e^p(x-p)$ ------ ①



つまり

$y=e^p(x-p)+e^p+1$

これが点 $(a,0)$ を通るから

$0=e^p(a-p)+e^p+1$

これを整頓すると

$e^p a=(p-1)e^p-1$

$e^p>0$ だから

$a=p-1-\dfrac{1}{e^p}$ ---------- ②

これは p の方程式である。この方程式を解いたとき、実数解が1つだけ出てきたならば、接点はただ1つ，つまり 接線はただ1つ存在することになる。

そこで、この方程式の実数解の個数を調べていく。

②を連立方程式に変えると

$$\begin{cases} y=a & \text{------ ③} \\ y=p-1-\dfrac{1}{e^p} & \text{------ ④} \end{cases}$$

この連立方程式の解は、それぞれの方程式のグラフの共有点に存在する。

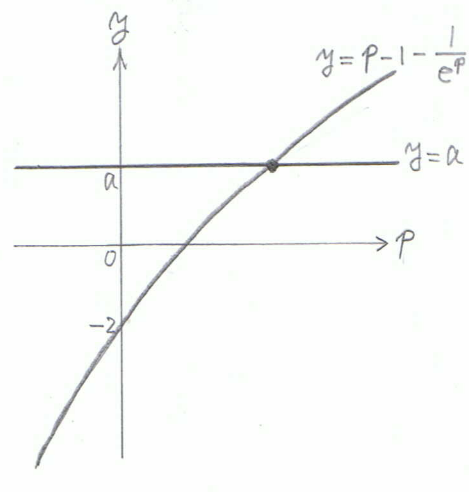
そこで、まず④のグラフを考えてみる。

④より $y'=1-\dfrac{0\cdot e^p-1\cdot e^p}{(e^p)^2}=1-\dfrac{-e^p}{(e^p)^2}=1+\dfrac{1}{e^p}>0$ となって

④は単調増加関数であることがわかる。

また、$\displaystyle\lim_{p\to-\infty}y=\lim_{p\to-\infty}\left(p-1-\frac{1}{e^p}\right)=-\infty$

$\displaystyle\lim_{p\to\infty}y=\lim_{p\to\infty}\left(p-1-\frac{1}{e^p}\right)=\infty$



だから

③の $y=a$ との共有点は、実数 a の値にかかわらず、いつも1個であることがわかる。

したがって 方程式②は任意の実数 a に対して

ただ1つの実数解を持つから、

点 $(a,0)$ を通る接線はただ1つ存在する

といえる。

(2) 点 $(a_n, 0)$ を通り、$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} としたとき、(1) の ② より

$$a_n = a_{n+1} - 1 - \frac{1}{e^{a_{n+1}}}$$

と表せる。

すると

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{e^{a_{n+1}}} \quad \text{------ ⑤}$$

となる。

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^{a_{n+1}}}\right)$ を求めるのだが、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ の値が必要になる。

そこで、⑤ を細かく見ると

$\dfrac{1}{e^{a_{n+1}}} > 0$ だから

$a_{n+1} - a_n > 1$ ということがわかる。

もし、$a_{n+1} - a_n = 1$ ならば

初項 $a_1=1$, 公差 1 ということから

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 1$$

だから $a_{n+1} - a_n > 1$ ならば

初項 $a_1=1$, 公差 1 より大 ということから

$$a_n \geqq 1 + (n-1)\cdot 1 \quad (n \geqq 1)$$

$$\therefore\ a_n \geqq n$$

等号は $a_1=1$ とするため。

よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

当然 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$ も成立。

したがって ⑤ より

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^{a_{n+1}}}\right) = 1$$

「階差数列と一般項」で表すと

a_1, a_2, a_3, a_4, ------, a_{n-1}, a_n, a_{n+1},

$\|$ 1, 1, 1, 1, 1, 1

上図のように階差が 1 ならば

$$n \geqq 2 \text{ で } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + (n-1)$$

$$= 1 + n - 1$$

$$= n$$

だから

a_1, a_2, a_3, a_4, ------, a_{n-1}, a_n, a_{n+1},

$\|$ 1, 1より大, 1より大, 1より大, 1より大, 1より大

上図のように階差が 1 より大ならば

$$n \geqq 2 \text{ で } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$> 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$