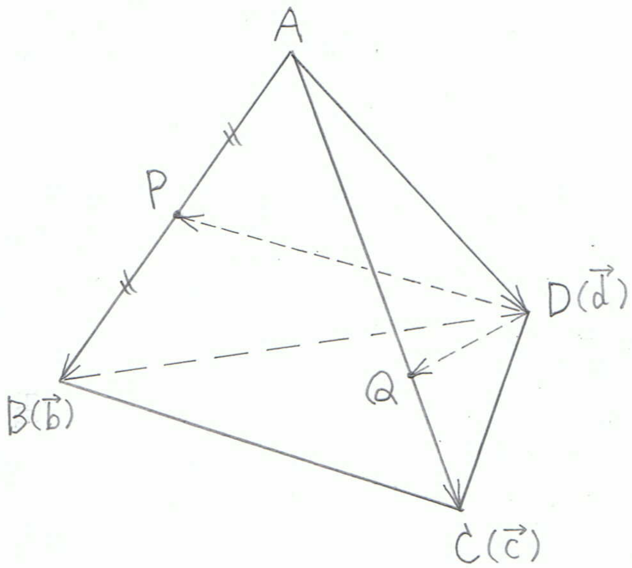
$\boxed{4}$ (35 点)

一辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

すると

$\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}$

$\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AD}=t\vec{c}-\vec{d}$ $(0\leqq t\leqq 1)$

となる。

また、

$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

となる。

$\cos\angle PDQ=\dfrac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}}{|\overrightarrow{DP}||\overrightarrow{DQ}|}$ であるから

ここで

$|\overrightarrow{DP}|^2=\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}\right)=\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{b}-2\times\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{d}\cdot\vec{d}$

$=\frac{1}{4}|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=\frac{1}{4}\times1-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

$\therefore\ |\overrightarrow{DP}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|\overrightarrow{DQ}|^2=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DQ}=(t\vec{c}-\vec{d})\cdot(t\vec{c}-\vec{d})=t^2\vec{c}\cdot\vec{c}-2\times t\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{d}\cdot\vec{d}$

$=t^2|\vec{c}|^2-2t\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=t^2\times1-2t\times\frac{1}{2}+1=t^2-t+1$

$t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ だから

$\therefore\ |\overrightarrow{DQ}|=\sqrt{t^2-t+1}$

また

$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{d}\right)\cdot(t\vec{c}-\vec{d})=\frac{t}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}-t\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{d}\cdot\vec{d}$

$=\frac{t}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-t\times\frac{1}{2}+1$

$=\frac{t}{4}-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+1$

$=-\frac{t}{4}+\frac{3}{4}$

$=\frac{3-t}{4}$

したがって

$$\cos\angle PDQ = \frac{\frac{3-t}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2-t+1}} = \frac{3-t}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

ここで

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-t}{\sqrt{t^2-t+1}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$ とおくと

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{-1 \cdot \sqrt{t^2-t+1} - (3-t) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}} \cdot (2t-1)}{\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{-\sqrt{t^2-t+1} - \frac{(3-t)(2t-1)}{2\sqrt{t^2-t+1}}}{\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{-2\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^2 - (3-t)(2t-1)}{2\sqrt{t^2-t+1}}}{\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{-2(t^2-t+1) - (3-t)(2t-1)}{2\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^3}$$

$$= \frac{-5t+1}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^3}$$

$$= \frac{-5\left(t-\frac{1}{5}\right)}{4\sqrt{3}\left(\sqrt{t^2-t+1}\right)^3}$$ ← $t^2-t+1>0$ だから 分母>0

すると 右の増減表が得られる。

t	0		$\frac{1}{5}$		1
$f'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大	↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

よって $t=\frac{1}{5}$ のとき $f(t)$ は最大で

最大値 $$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{3-\frac{1}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} + 1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\frac{14}{5}}{\sqrt{\frac{21}{25}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\frac{14}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{7}{\sqrt{3}\sqrt{21}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{63}} = \frac{7}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ゆえに $\cos\angle PDQ$ の最大値は $\frac{\sqrt{7}}{3}$ である。