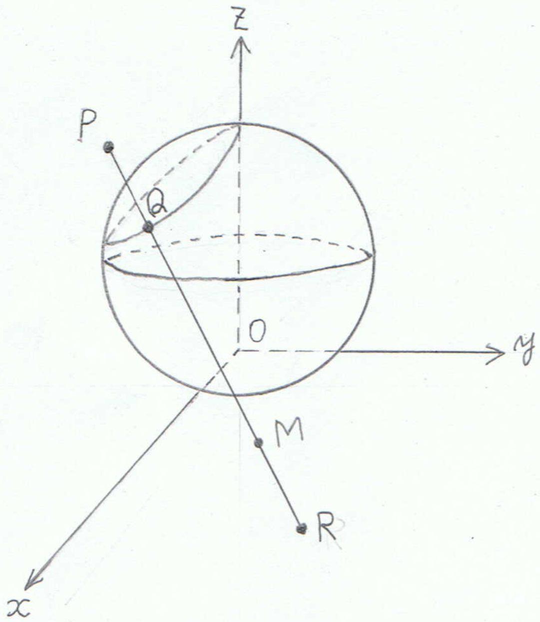
$\boxed{4}$ (30 点)

xyz 空間の中で，$(0,0,1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,0,2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P$(1,0,2)$ の 2 点を通る直線 ℓ と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．



直線PR上にある点$M(x, y, z)$は
ベクトルを使って次のように表せる。

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PR}$ （tは実数）

ここで $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ だから

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + t(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})$

$= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OR}$

点Pは$(1, 0, 2)$であり，
点Rを$(X, Y, 0)$とすると
上式のベクトル$\overrightarrow{OM}$は次のように
成分表示できる。

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) &= (1-t)(1, 0, 2) + t(X, Y, 0) \\
&= (1-t, 0, 2-2t) + (tX, tY, 0) \\
&= (1-t+tX, tY, 2-2t)
\end{aligned}
$$

つまり 直線PR上にある点Mの座標は$(1-t+tX, tY, 2-2t)$となる。

そして、
この点Mが球面S上にのっているためには(球面S上にのっているときはQという名称)，
点Mの座標を球面Sの式に代入したとき、実数tがきちんと存在していなければ
ならない。

球面Sの式は $x^2+y^2+(z-1)^2=1^2$ だから

$$(1-t+tX)^2+(tY)^2+(2-2t-1)^2=1^2$$

$$1+t^2+t^2X^2-2t-2t^2X+2tX+t^2Y^2+4+4t^2+1-8t+4t-4=1$$

$$(X^2-2X+Y^2+5)t^2+(2X-6)t+1=0$$

$$(X^2-2X+Y^2+5)t^2+2(X-3)t+1=0$$

点Qが球面S上のどこに
のっているかによって、
tはいろいろな実数になる。

これはtの2次方程式である。
tが実数となる条件は、判別式$\geqq 0$だから

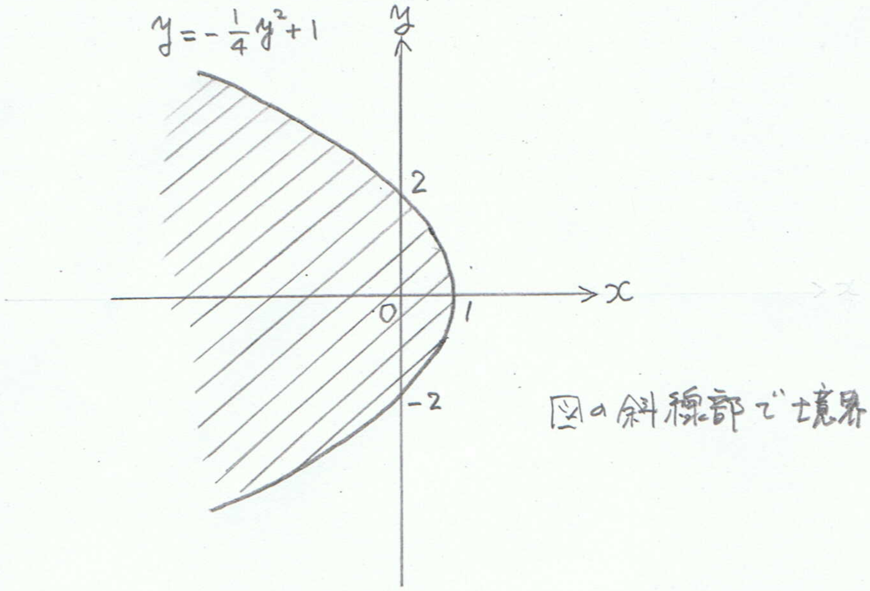
$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4} = (X-3)^2 - (X^2-2X+Y^2+5)\cdot 1 &\geqq 0 \\
X^2-6X+9-X^2+2X-Y^2-5 &\geqq 0 \\
-4X-Y^2+4 &\geqq 0 \\
-4X &\geqq Y^2-4
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ X \leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

したがって　点Rの動く範囲は、

xy平面上において、次の領域である。

$$x \leqq -\frac{1}{4}y^2+1$$



図の斜線部で境界を含む。