5　　(30 点)

a, b, c, d, e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = dx + e$$

を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2+bx+c \\ g(x) = dx+e \end{array}\right\}$$ a, b, c, d, e は正の有理数。

まず、この2つの式をくっつけてみる。

そのために $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの商を $px+q$, 余りを r とすると

$f(x) = (dx+e)(px+q)+r$ （p, q, r は有理数定数） -------①

すると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = px+q+\frac{r}{dx+e}$$ となる。

任意の正の整数 n に対して

$$\frac{f(n)}{g(n)} = pn+q+\frac{r}{dn+e}$$ ---------② は整数である。

ここで n がものすごく大きな正の整数のとき、$\frac{r}{dn+e}$ は、1より小さい小数になるので、n がどんな正の整数であっても、右辺が整数となるには、r が0となっているのが良いことに気付く。しかし、p, q が小数で、$\frac{r}{dn+e}$ の小数と打ち消し合って整数となる場合があるかもしれないので、p と q を消してしまう方法を考えなくてはならない。

そこで、もう1つ、同様の式を作ってみる。

任意の正の整数 n に対して、正の整数 $n+1$ をとってみる。

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)} = p(n+1)+q+\frac{r}{d(n+1)+e} = pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}$$ -----③

これも、もちろん整数である。

②と③を比べてみると、③－②で pn と q が消えるが、p が1つ残ってしまう。

更に、もう1つ、同様の式を作って、p, q が全て消せないかさがす。

マイナスがついた式があると消しやすいのではないかと考えて、正の整数 $n-1$ をとってみる。

$$\frac{f(n-1)}{g(n-1)} = p(n-1)+q+\frac{r}{d(n-1)+e} = pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}$$ -----④

④に $-p$ があるので③とたすと p は消えるが、$2pn$ と $2q$ が出てくる。

しかし②をみると、pn と q が1個ずつある!!!

そこで

③＋④－2×② を作ってみる。

$$\frac{f(n+1)}{g(n+1)}+\frac{f(n-1)}{g(n-1)}-2\times\frac{f(n)}{g(n)}$$ ← この値はもちろん整数

$$=pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}+pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{dn+d+e}+\frac{1}{dn-d+e}-\frac{2}{dn+e}\right)r$$

$$=\frac{(dn-d+e)(dn+e)+(dn+d+e)(dn+e)-2(dn+d+e)(dn-d+e)}{(dn+d+e)(dn-d+e)(dn+e)}\cdot r$$

$$=\frac{(dn-d+e+dn+d+e)(dn+e)-2\{(dn+e)+d\}\{(dn+e)-d\}}{(dn+d+e)(dn-d+e)(dn+e)}\cdot r$$

$$=\frac{(2dn+2e)(dn+e)-2\{(dn+e)^2-d^2\}}{(dn+d+e)(dn-d+e)(dn+e)}\cdot r$$

$$=\frac{2(dn+e)^2-2(dn+e)^2+2d^2}{(dn+d+e)(dn-d+e)(dn+e)}\cdot r$$

$$=\frac{2d^2r}{(d\boldsymbol{n}+d+e)(d\boldsymbol{n}-d+e)(d\boldsymbol{n}+e)} \quad \text{---------} ⑤$$

どんなに大きい正の整数 $\boldsymbol{n}$ に対しても ⑤ は整数となるのだから、
$r=0$ でなければならないことは明らかである。
したがって ① は

$$f(x)=(dx+e)(px+q)$$

となって、 $f(x)$ は $g(x)=dx+e$ で割り切れることになる。