6 (35 点)

2つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \qquad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく．$x_0 = \dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n = 1, 2, \ldots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n < \dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．

nに順に整数を入れて書き並べてみよう。

$x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = f_0\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$, $x_1 = f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$

$\therefore\ x_1 = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$

$x_2 = f_0\left(\frac{1}{4}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$, $f_0\left(\frac{3}{4}\right) = \dfrac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$

$x_2 = f_1\left(\frac{1}{4}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}+1}{2} = \frac{5}{8}$, $f_1\left(\frac{3}{4}\right) = \dfrac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8}$

$\therefore\ x_2 = \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}$

$x_3 = f_0\left(\frac{1}{8}\right) = \dfrac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}$, $f_0\left(\frac{3}{8}\right) = \dfrac{\frac{3}{8}}{2} = \frac{3}{16}$, $f_0\left(\frac{5}{8}\right) = \dfrac{\frac{5}{8}}{2} = \frac{5}{16}$, $f_0\left(\frac{7}{8}\right) = \dfrac{\frac{7}{8}}{2} = \frac{7}{16}$

$x_3 = f_1\left(\frac{1}{8}\right) = \dfrac{\frac{1}{8}+1}{2} = \frac{9}{16}$, $f_1\left(\frac{3}{8}\right) = \dfrac{\frac{3}{8}+1}{2} = \frac{11}{16}$, $f_1\left(\frac{5}{8}\right) = \dfrac{\frac{5}{8}+1}{2} = \frac{13}{16}$,

$f_1\left(\frac{7}{8}\right) = \dfrac{\frac{7}{8}+1}{2} = \frac{15}{16}$

$\therefore\ x_3 = \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \frac{7}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{11}{16},\ \frac{13}{16},\ \frac{15}{16}$

ここで、次の3つの事柄が考えられる。

(i) x_0, x_1, x_2, x_3 それぞれ、分子に奇数が順番に出てきて、分母は2の累乗となっている。
x_0, x_1, x_2, x_3 それぞれの分数の個数は、分母の数値の半分（最大の分数が分子＝分母−1 になっている）。
したがって $x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots\cdots, 2^n)$ と推測できる。

(ii) ◯ 以下の分数が $\frac{2}{3}$ より小となっている。

(iii) 「各 $n = 1, 2, \text{----}$ について、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める」ということは、x_n で出てきた分数は、どれも同じ確率だということ。
例えば、x_2 で出てきた $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ はどれも同じ確率 $\frac{1}{4}$
x_3 で出てきた $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$ はどれも同じ確率 $\frac{1}{8}$

だからこの問題は、x_n で出てきた分数のうち、$\frac{2}{3}$ より小となるのは何個中の何個か、割合で表せ、ということである。

そこで まず 推測した $x_n = \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}$ $(k=1, 2, \cdots, 2^n)$

が正しいことを数学的帰納法で証明する必要がある。

[1] $n=0$ のとき

$$x_0 = \frac{2\times1-1}{2^{0+1}} = \frac{1}{2}$$ となって成り立つ。

[2] $n=p$ のとき成り立つと仮定すると

$$x_p = \frac{2k-1}{2^{p+1}} \quad (k=1, 2, \cdots, 2^p)$$

$n=p+1$ のとき

㋐ $x_{p+1} = f_0(x_p) = \dfrac{x_p}{2} = \dfrac{2k-1}{2^{p+1}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2k-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2k-1}{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2^{(p+1)+1}}}$ $(k=1, 2, \cdots, 2^p)$

また

㋑ $x_{p+1} = f_1(x_p) = \dfrac{x_p+1}{2} = \left(\dfrac{2k-1}{2^{p+1}}+1\right)\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{2k-1+2^{p+1}}{2^{p+1}} \times \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{2k-1+2^{p+1}}{2^{p+2}} = \dfrac{2^{p+1}+2k-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2(2^p+k)-1}{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2^{(p+1)+1}}}$ $(k=1, 2, \cdots, 2^p)$

ここで、実際に ～～～ の式の k に自然数を順に入れて確認してみよう。

㋐より

$k=1$ のとき $\dfrac{2\times1-1}{2^{p+2}} = \dfrac{1}{2^{p+2}}$

分子 $+2$

$k=2$ のとき $\dfrac{2\times2-1}{2^{p+2}} = \dfrac{3}{2^{p+2}}$

分子 $+2$

$k=3$ のとき $\dfrac{2\times3-1}{2^{p+2}} = \dfrac{5}{2^{p+2}}$

$\vdots$

$k=2^p$ のとき $\dfrac{2\times2^p-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2^{p+1}-1}{2^{p+2}}$

分子 $+2$

㋑より

$k=1$ のとき $\dfrac{2(2^p+1)-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2^{p+1}+1}{2^{p+2}}$

分子 $+2$

$k=2$ のとき $\dfrac{2(2^p+2)-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2^{p+1}+3}{2^{p+2}}$

$\vdots$

$k=2^p$ のとき $\dfrac{2(2^p+2^p)-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2\times(2\times2^p)-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2\times2^{p+1}-1}{2^{p+2}} = \dfrac{2^{p+2}-1}{2^{p+2}}$

上のように㋐から㋑へ、分子 $+2$ できちんとつながっていることがわかる。

しかも㋐, ㋑共に ～～～ の式をみればわかるとおり

$$x_{p+1} = \frac{2\times\boxed{}-1}{2^{(p+1)+1}}$$

という、推測した形をしている。

よって、$n=p+1$ のとき

$$x_{p+1} = \frac{2k-1}{2^{(p+1)+1}} \quad (k=1, 2, \cdots\cdots, 2^{p+1})$$

となって、成り立つことがわかる。

[1], [2] から 推測した式は、0以上の全ての整数nで成り立つ。

さて 次は x_nで求めた分数のうち、先頭から何番目の分数までが、$\frac{2}{3}$より小となるかを考えていこう。

そこで　$x_n < \frac{2}{3}$

つまり

$\frac{2k-1}{2^{n+1}} < \frac{2}{3}$ となる kの範囲をさがしてみる。

$2^{n+1} > 0$ だから

$$2k-1 < \frac{2}{3} \times 2^{n+1}$$

$$2k < \frac{2^{n+2}}{3} + 1$$

$$2k < \frac{2^{n+2}+3}{3}$$

$$\therefore k < \frac{2^{n+2}+3}{6} \quad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

つまり、$\frac{2^{n+2}+3}{6}$より小さい整数のうち、最大のものを見つければ良い，ということになる。

ここで、分子のnに整数を順に代入して、分子を6で割った余りを調べてみよう。

$n=0$のとき　$2^{0+2}+3=7$ だから 6で割ると余り1

$n=1$のとき　$2^{1+2}+3=11$ だから 6で割ると余り5

$n=2$のとき　$2^{2+2}+3=19$ だから 6で割ると余り1

$n=3$のとき　$2^{3+2}+3=35$ だから 6で割ると余り5

$n=4$のとき　$2^{4+2}+3=67$ だから 6で割ると余り1

$n=5$のとき　$2^{5+2}+3=131$ だから 6で割ると余り5

余りを見ると

n が偶数のときは、分子から 1 を引くと 分子は 6 で割り切れるから

求める最大の整数は $\dfrac{2^{n+2}+3-1}{6}=\dfrac{2^{n+2}+2}{6}$ ------①

n が奇数のときは、分子から 5 を引くと 分子は 6 で割り切れるから

求める最大の整数は $\dfrac{2^{n+2}+3-5}{6}=\dfrac{2^{n+2}-2}{6}$ ------②

と推測することができる。

そこで、この推測が正しいことを数学的帰納法で証明する。

まず n が偶数のとき ① が成り立つことを証明する。

$n=2l$ $(l=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ とおくと

① は $\dfrac{2^{2l+2}+2}{6}$ と表せるので、$2^{2l+2}+2$ が 6 の倍数であることを証明する。

[1] $l=0$ のとき

$2^{2\times0+2}+2=2^2+2=6$ となって成り立つ.

[2] $l=p$ のとき $2^{2p+2}+2$ が 6 の倍数と仮定する。

$l=p+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
2^{2(p+1)+2}+2 &= 2^{(2p+2)+2}+2 \\
&= 2^{2p+2}\times2^2+2 \\
&= 2^{2p+2}\times4+2 \\
&= 2^{2p+2}\times(1+3)+2 \\
&= 2^{2p+2}+2^{2p+2}\times3+2 \\
&= \underline{2^{2p+2}+2}+\underline{2^{2p+2}\times3}
\end{aligned}
$$

仮定を使うため 2^{2p+2} がほしい.

ここで $\underline{2^{2p+2}+2}$ は 仮定より 6 の倍数であり

$\underline{2^{2p+2}\times3}$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので 6 の倍数であるから

2 つの 6 の倍数の和は 6 の倍数となる。

よって $l=p+1$ のときも 6 の倍数となって成り立つ。

[1],[2] から すべての 0 以上の整数 l で 6 の倍数となる。

したがって、n が偶数のとき、① は成り立つ。

次は　nが奇数のとき②が成り立つことを証明する。

$n=2l+1$　$(l=0,1,2,\cdots)$ とおくと

② は $\dfrac{2^{(2l+1)+2}-2}{6}=\dfrac{2^{2l+3}-2}{6}$ と表せるので、

$2^{2l+3}-2$ が 6の倍数であることを証明する。

[1]　$l=0$のとき

$2^{2\times 0+3}-2=2^3-2=6$　となって成り立つ。

[2]　$l=p$のとき　$2^{2p+3}-2$ が 6の倍数と仮定する。

$l=p+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
2^{2(p+1)+3}-2 &= 2^{2p+2+3}-2 \\
&= 2^{2p+3}\times 2^2-2 \\
&= 2^{2p+3}\times 4-2 \\
&= 2^{2p+3}\times(1+3)-2 \\
&= 2^{2p+3}+2^{2p+3}\times 3-2 \\
&= \underline{2^{2p+3}-2}+\underline{2^{2p+3}\times 3}
\end{aligned}
$$

仮定を使うため 2^{2p+3} がほしい

ここで、$2^{2p+3}-2$ は仮定より 6の倍数であり、

$2^{2p+3}\times 3$ は 2の倍数かつ3の倍数なので6の倍数であるから

2つの6の倍数の和は6の倍数となる。

よって　$l=p+1$ のときも 6の倍数となって成り立つ。

[1], [2] から すべての0以上の整数lで 6の倍数となる。

したがって　nが奇数のとき、② は成り立つ。

これで、 x_nで求めた分数のうち先頭から何番目の分数までが

$\frac{2}{3}$より小となるかがわかった。

つまり、x_nで求めた分数のうち、$\frac{2}{3}$より小さくなるのは何個かが

わかった。

そして、 x_nで求めた分数全体の個数は

$$x_n=\frac{2k-1}{2^{n+1}}\quad(k=1,2,3,\cdots,2^n)\ より$$

2^n個ということがわかる。

ゆえに 求める確率 P_n は

nが偶数のとき

$$P_n = \frac{\frac{2^{n+2}+2}{6}}{2^n} = \frac{2^{n+2}+2}{6} \times \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+2}+2}{3 \times 2 \times 2^n} = \frac{2^{n+2}+2}{3 \times 2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+2}}{3 \times 2^{n+1}} + \frac{2}{3 \times 2^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 2^n}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{----} \ ③$$

nが奇数のとき

$$P_n = \frac{\frac{2^{n+2}-2}{6}}{2^n} = \frac{2^{n+2}-2}{6} \times \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{2^{n+2}-2}{3 \times 2 \times 2^n} = \frac{2^{n+2}-2}{3 \times 2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^{n+2}}{3 \times 2^{n+1}} - \frac{2}{3 \times 2^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \times 2^n}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{----} \ ④$$

③, ④をまとめて、次のようにも表せる。

$$P_n = \frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$