

1

(30 点)

(1) n を 2 以上の自然数とするとき, 関数

$$f_n(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin^{n-1} \theta$$

の $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n)^n$ を求めよ.

2

(30 点)

素数 p, q を用いて

$$p^q + q^p$$

と表される素数をすべて求めよ.

3

(35 点)

四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば, それは正四面体であることを示せ.

条件: 頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は

対面の外心を通る.

ただし, 四面体のある頂点の対面とは, その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう.

4

(35 点)

xyz 空間において, 平面 $y = z$ の中で

$$|x| \leq \frac{e^y + e^{-y}}{2} - 1, \quad 0 \leq y \leq \log a$$

で与えられる図形 D を考える. ただし a は 1 より大きい定数とする.

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

5

(35 点)

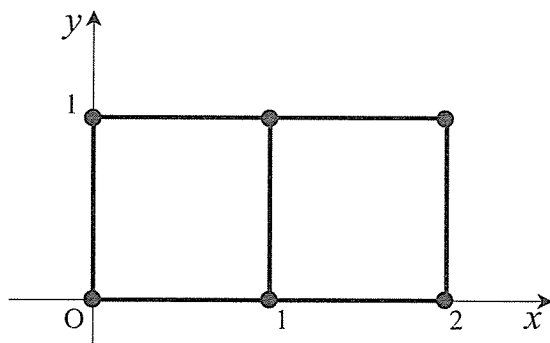
xy 平面上の 6 個の点 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている. 動点 X は, これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する.

規則: 動点 X は, そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって

結ばれる図の点のいずれかに, 等しい確率で移動する.

例えば, X が $(2, 0)$ にいるときは, $(1, 0), (2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する. また X が $(1, 1)$ にいるときは, $(0, 1), (1, 0), (2, 1)$ のいずれかに $\frac{1}{3}$ の確率で移動する.

時刻 0 で動点 X が $O = (0, 0)$ から出発するとき, n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ. ただし n は 0 以上の整数とする.



6

(35 点)

複素数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対し, 次の条件を考える.

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる.

(ロ) $f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である.

この 2 つの条件 (イ), (ロ) を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ.

問題は, このページで終わりである.