$\boxed{1}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　点)

w を 0 でない複素数，$x,\ y$ を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする．

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする．w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x,y) の軌跡を求めよ．

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 (x,y) の軌跡を求めよ．

絶対値とか偏角と書かれているので、複素数を極形式で表して考えていくことにする。

(1) 定数Rが$R>1$のときを考える。

θを任意の実数（任意の角）とすると

$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)$と表せる。

すると

$$\frac{1}{w}=\frac{1}{R(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{R(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{R(\cos^2\theta-i^2\sin^2\theta)}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{R(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

だから

$$w+\frac{1}{w}=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{R}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta=x+yi \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta \\ y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta \end{cases} \quad \text{-----} ①$$

これは動点(x, y)の，角θを用いた媒介変数表示である。

そこで媒介変数θを消去して、xとyの関係式を求めていく。

$R>1$だから　$R+\frac{1}{R}\neq 0$，$R-\frac{1}{R}\neq 0$　ので

①より　$\cos\theta=\dfrac{x}{R+\frac{1}{R}}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{R-\frac{1}{R}}$

ここで　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$　だから

$$\left(\frac{x}{R+\frac{1}{R}}\right)^2+\left(\frac{y}{R-\frac{1}{R}}\right)^2=1$$

したがって点(x, y)の軌跡は

楕円　$\dfrac{x^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$　である。

(2) 定数αが $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ のときを考える。

rを正の任意の実数とすると

$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ と表せる。

すると(1)と同様に

$w+\frac{1}{w}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha=x+yi$ より

$$\begin{cases} x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha \\ y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha \end{cases} \quad \text{------ ②}$$

これは動点(x,y)の、正の実数rを用いた媒介変数表示である。

そこで媒介変数rを消去して、xとyの関係式を求めていく。

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ だから $\cos\alpha\neq0$, $\sin\alpha\neq0$ なので

② より $\frac{x}{\cos\alpha}=r+\frac{1}{r}$ ---- ③

$\frac{y}{\sin\alpha}=r-\frac{1}{r}$ ---- ④

③+④ より $\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}=2r$ ---- ⑤

③−④ より $\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}=\frac{2}{r}$ ---- ⑥

⑤×⑥ より $\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=2r\times\frac{2}{r}$

$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=4$

$\therefore\ \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ 〜〜〜 双曲線だ!!

ここで、rが正の任意実数という制約がついているので注意!!

② より

$r>0$ のとき $r+\frac{1}{r}>0$ となり、$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$ だから

$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha>0$ となる。

$r>0$ のとき $r-\frac{1}{r}$ は正にも負にもなる(任意の値になる)から

$y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha$ は正にも負にもなる(任意の値になる)。

したがって点(x,y)の軌跡は

双曲線 $\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1$ の $x>0$ の部分である。