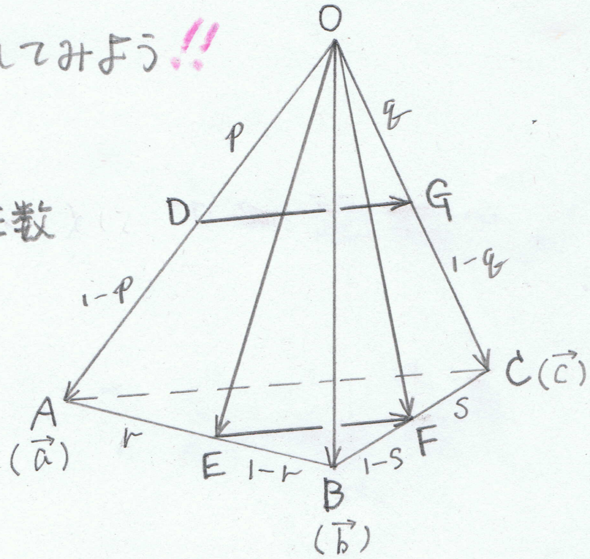
$\boxed{2}$

四面体 OABC を考える．点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{CF} : \mathrm{FB}$ であることを示せ．

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ．

(1)　$\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ で表してみよう!!




$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

また、実数 $p, q, r, s$ を 1より小さい正数

として

$OD : DA = p : 1-p$

$OG : GC = q : 1-q$

$AE : EB = r : 1-r$

$CF : FB = s : 1-s$

とする。

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OD} = q\vec{c} - p\vec{a}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = s\vec{b} + (1-s)\vec{c} - \{r\vec{b} + (1-r)\vec{a}\}$

$= (s-r)\vec{b} + (1-s)\vec{c} - (1-r)\vec{a}$

$\overrightarrow{DG} \parallel \overrightarrow{EF}$ より $k$ を実数として $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DG}$ と表せるから

$(s-r)\vec{b} + (1-s)\vec{c} - (1-r)\vec{a} = k(q\vec{c} - p\vec{a})$ ------①

ここで、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1次独立だから

$s - r = 0$

$\therefore\ r = s$

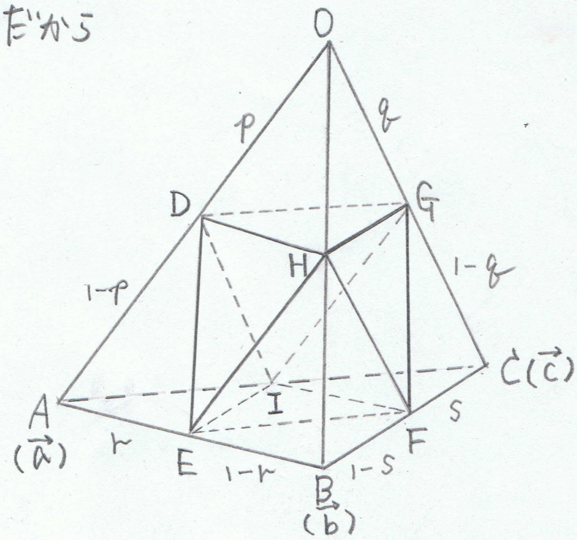
したがって　$AE : EB = CF : FB$　となる。

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点だから

四角形 DEFG は正方形であるから

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EF}$ となるので

① において $k=1$ となる。



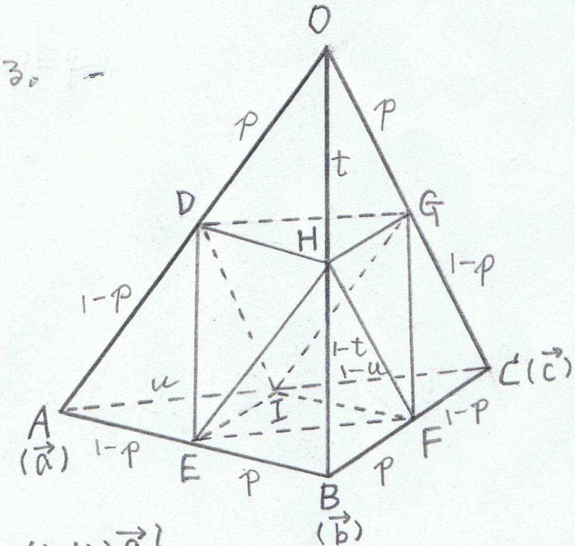

つまり

$(s-r)\vec{b}+(1-s)\vec{c}-(1-r)\vec{a}=q\vec{c}-p\vec{a}$

すると $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立だから

$$\left.\begin{array}{l} s-r=0 \\ 1-s=q \\ 1-r=p \end{array}\right\} \text{ より}$$

$s=r,\ p=q,\ s=1-p,\ r=1-p$ となる。




そして

$OH:HB = t:1-t \quad (0<t<1)$

$AI:IC = u:1-u \quad (0<u<1)$

とすると

四角形 DIFH は正方形であるから

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{IF}$ となるので

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD} = t\vec{b}-p\vec{a}$

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OI} = p\vec{c}+(1-p)\vec{b}-\{u\vec{c}-(1-u)\vec{a}\}$

より

$p\vec{c}+(1-p)\vec{b}-\{u\vec{c}-(1-u)\vec{a}\} = t\vec{b}-p\vec{a}$

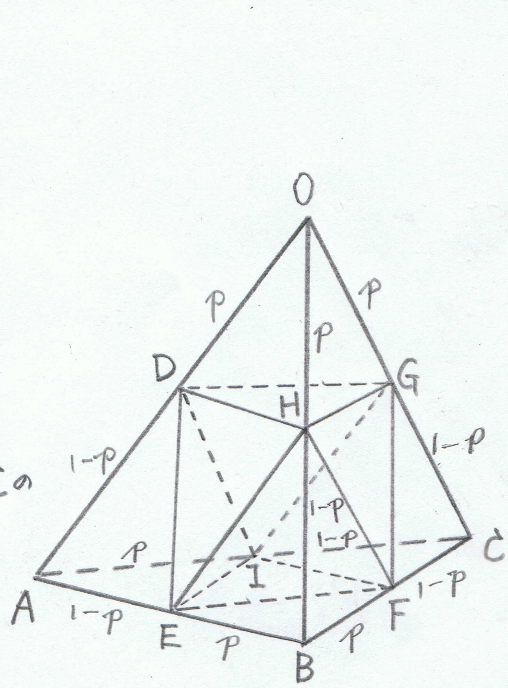
$(p-u)\vec{c}+(1-p)\vec{b}+(1-u)\vec{a} = t\vec{b}-p\vec{a}$

ここで $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立だから

$$\left.\begin{array}{l} p-u=0 \\ 1-p=t \\ 1-u=p \end{array}\right\} \text{ より}$$

$p=u,\ p=t,\ 1-p=p$ となり、

$1-p=p$ より $2p=1 \quad \therefore p=\frac{1}{2}$




したがって、点 D, E, F, G, H, I は四面体 OABC の各辺の中点となっている。

そして、中点連結定理より

AB = 2DH, BC = 2HG, CA = 2GD であり

△DHG は正八面体の1つの面だから △DHG は正三角形だから

DH = HG = GD となっているので △ABC も正三角形である。

同様に考えて、
△GIFが正三角形だから△OABも正三角形,
△DEIが正三角形だから△OBCも正三角形,
△HFEが正三角形だから△OCAも正三角形

であるから、四面体OABCは正四面体である。