3

$p, q$ を自然数，$\alpha, \beta$ を

$$\tan\alpha = \frac{1}{p}, \qquad \tan\beta = \frac{1}{q}$$

を満たす実数とする．このとき

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2$$

を満たす $p, q$ の組 $(p, q)$ をすべて求めよ．

加法定理

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

２倍角の公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

代入　$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$　$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}}{1-\tan\alpha\cdot\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{p}+\dfrac{\dfrac{2}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}}}{1-\dfrac{1}{p}\times\dfrac{\dfrac{2}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}}}$$

$$分子 = \frac{1}{p} + \frac{\frac{2}{q}}{1-\frac{1}{q^2}} = \frac{1}{p} + \frac{\frac{2}{q}}{\frac{q^2-1}{q^2}} = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} \times \frac{q^2}{q^2-1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2-1}$$

$$= \frac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)}$$

分母＝ $1-\frac{1}{p}\times\frac{\frac{2}{q}}{1-\frac{1}{q^2}}=1-\frac{1}{p}\times\frac{\frac{2}{q}}{\frac{q^2-1}{q^2}}=1-\frac{1}{p}\times\frac{2}{q}\times\frac{q^2}{q^2-1}$

$$=1-\frac{2q}{p(q^2-1)}$$

$$=\frac{p(q^2-1)-2q}{p(q^2-1)}$$

$$\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\dfrac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)}}{\dfrac{p(q^2-1)-2q}{p(q^2-1)}}=\frac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)-2q}$$

ここで　$\tan(\alpha+2\beta)=2$ より

$$\frac{q^2-1+2pq}{p(q^2-1)-2q}=2$$

$$2\{p(q^2-1)-2q\}=q^2-1+2pq$$

$$2p(q^2-1)-4q=q^2-1+2pq$$

$$2p(q^2-1)-2pq=q^2+4q-1$$

$$2p(q^2-q-1)=q^2+4q-1$$

$2p(q^2-q-1)=q^2+4q-1$

$q=1$ のとき　$2p(1-1-1)=1+4-1$

$-2p=4$

$p$ が負数となってしまうので $q=1$ は不適。

$q=2$ のとき　$2p(4-2-1)=4+8-1$

$2p=11$

$p$ は正数となる。

そこで　$q \geqq 2$ のとき

$q^2-q-1=(q-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-1=(q-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}>0$

$q^2+4q-1=(q+2)^2-4-1=(q+2)^2-5>0$

だから　$q \geqq 2$ のとき　$p$ は正数となっている。

そこで　$q \geqq 2$ で考えていけば良い。

$$2p(q^2-q-1)=q^2+4q-1$$

$$p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

pは自然数より　$p \geqq 1$

$$\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \geqq 1$$

$$q^2+4q-1 \geqq 2(q^2-q-1)$$

$$q^2-6q-1 \leqq 0$$

$$(q-3)^2-9-1 \leqq 0$$

$$(q-3)^2 \leqq 10$$

これを満たす2以上の自然数$q$は

$$q=2,3,4,5,6$$

$$p=\frac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

①より

| q | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| p | $\frac{11}{2}$ | 2 | $\frac{31}{22}$ | $\frac{22}{19}$ | $\frac{59}{58}$ |

よって 求める p,q の組は

$$\underline{(p,q)=(2,3)}$$