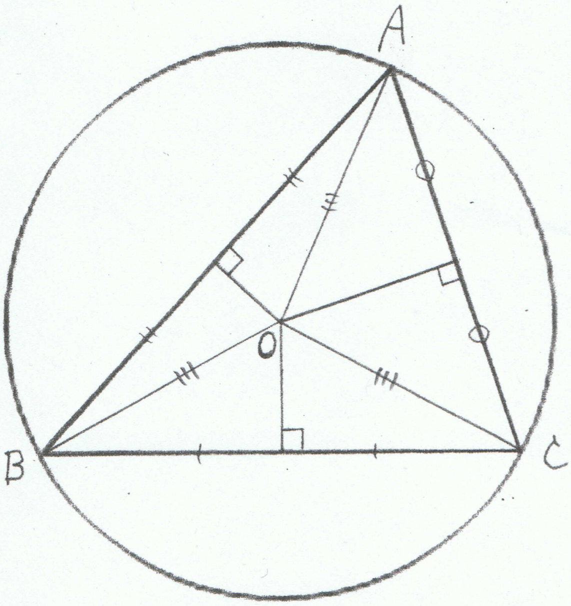
$\boxed{4}$

△ABC は鋭角三角形であり，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする．また △ABC の外接円の半径は 1 であるとする．

(1) △ABC の内心を P とするとき，∠BPC を求めよ．

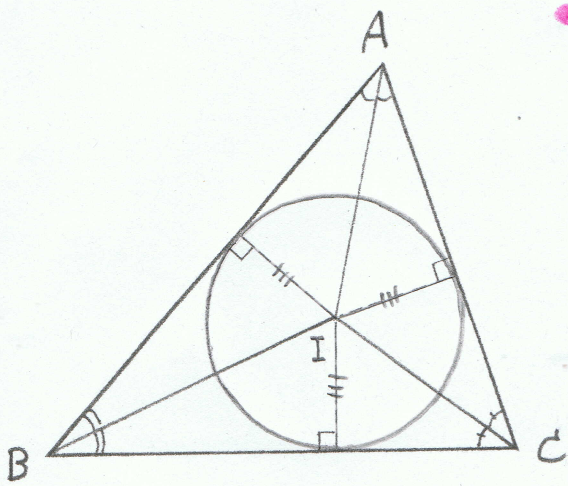
(2) △ABC の内接円の半径 r の取りうる値の範囲を求めよ．

[定理]



・三角形の外心

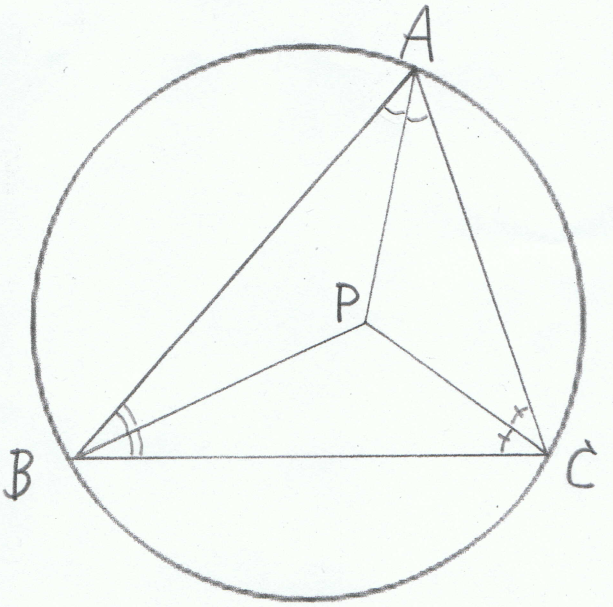
三角形の3辺の垂直二等分線は1点Oで交わり、
その点から各頂点までの距離は等しい。



・三角形の内心

三角形の3つの内角の2等分線は1点Iで交わり、
その点から各辺までの距離は等しい。

(1)



$$\angle BPC = \pi - (\angle PBC + \angle PCB)$$

$$= \pi - \left(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}\right)$$

$$= \pi - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

ここで

$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ より

$$\angle B + \angle C = \pi - \angle A = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

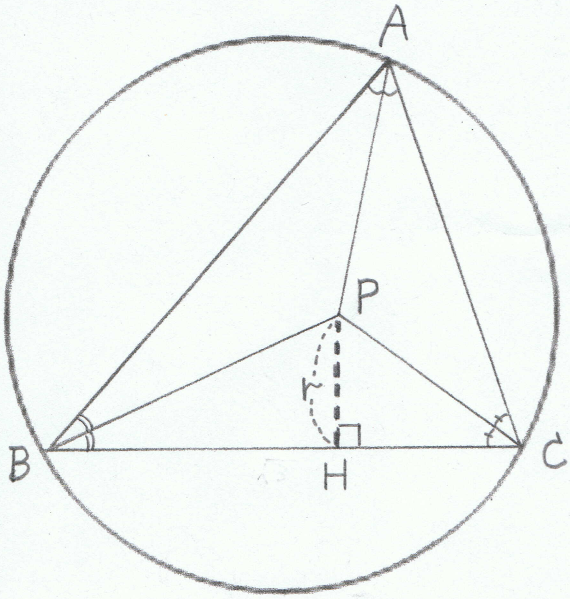
だから

$$\angle BPC = \pi - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\pi$$

(2)　まず △ABC に正弦定理をあてはめて BC の長さを求めてみる。



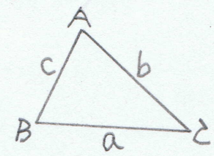
$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2\times 1$$

$$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2$$

$$BC = 2\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

正弦定理



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(Rは外接円の半径)

次に、△BPC に正弦定理をあてはめて BP の長さを求めてみる。

$$\frac{BP}{\sin\angle BCP} = \frac{BC}{\sin\angle BPC}$$

$$\frac{BP}{\sin\frac{\angle C}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$BP = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\sin\frac{\angle C}{2} = 2\sin\frac{\angle C}{2}$$

そして　直角三角形BPHに着目して、r の長さを求めていく。

$$\sin\angle PBH = \frac{r}{BP}$$

$$\sin\frac{\angle B}{2} = \frac{r}{BP}$$

$$r = BP\sin\frac{\angle B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}$$

$$= 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}\right) - \cos\left(\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)\right\}$$

$$= -\left\{\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\angle B}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)\right\}$$

$$= \cos\frac{\angle B-\angle C}{2} - \frac{1}{2}$$

積和公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\frac{\angle A}{2}+\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\angle A}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

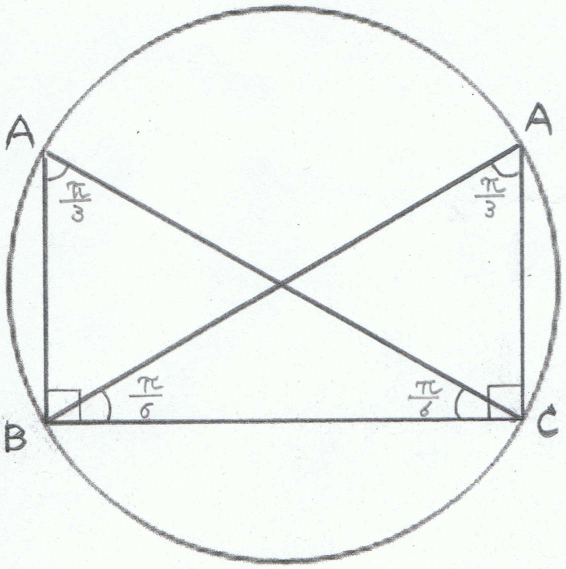
ここで

$\triangle ABC$が鋭角三角形であるためには

左図より $\frac{\pi}{6} < \angle B < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{6} < \angle C < \frac{\pi}{2}$

でなくてはならない。



すると

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} < \angle B - \angle C < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$$

例えば

$$\left.\begin{array}{l} 5 < x < 9 \\ 2 < y < 8 \end{array}\right\} \text{のとき}$$

$$5-8 < x-y < 9-2$$

$$-3 < x-y < 7$$

となる。

つまり

$$-\frac{\pi}{3} < \angle B - \angle C < \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{6} < \frac{\angle B - \angle C}{2} < \frac{\pi}{6}$$

となる。

よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\frac{\angle B - \angle C}{2} \leqq 1$$

$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ のとき

$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leqq 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < \cos\frac{\angle B - \angle C}{2} - \frac{1}{2} \leqq 1 - \frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r \leqq \frac{1}{2}$$