5

$a \geqq 0$ とする．$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$, 直線 $y = ax$, 直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ．

(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする．)

まずはじめに $y=xe^{-x}$ のグラフをきちんとかいてみよう!!

$y=xe^{-x}$

$y'=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$y''=-1\cdot e^{-x}+(1-x)e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$

$y'=0$ とすると $x=1$, $y''=0$ とすると $x=2$

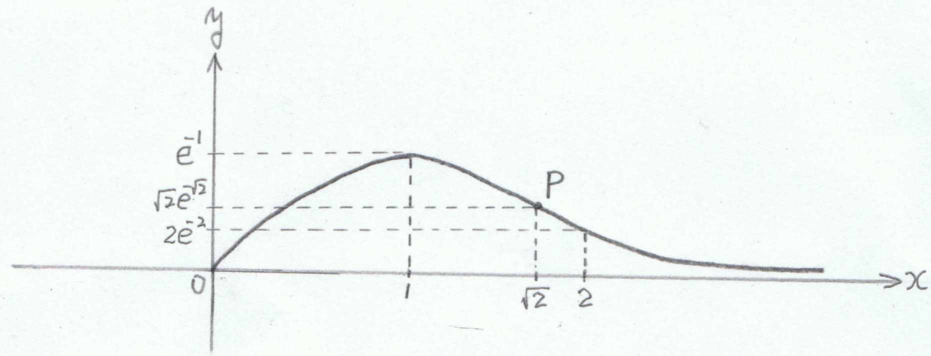
よって，y の増減，凹凸は次の表のようになる。

x	0		1		$\sqrt{2}$		2	
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	0	↗	極大 e^{-1}	↘	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$	↘	変曲点 $2e^{-2}$	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ ←

$2<x$ のとき $y'<0$ かつ $y=xe^{-x}>0$ だから当然!

以上から，グラフの概形は下図のようになる。



$y=ax$ は原点を通る直線だから，曲線 $y=xe^{-x}$ も原点を通るので，原点においてどんな傾きで接するのかを知る必要がある。

この曲線に直線 $y=ax$ を重ねてみる。

そのために，まずこの曲線の原点における接線の傾きを確認しておく。

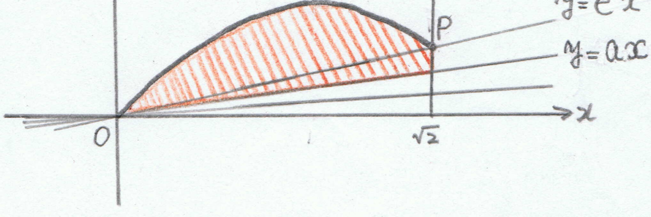
$y'=(1-x)e^{-x}$ より $x=0$ のとき $y'=(1-0)e^{0}=1$ となっている。

ここで $P(\sqrt{2},\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ としておく。

直線 $y=ax$ が点 P を通るとき，その傾きは $\dfrac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=e^{-\sqrt{2}}$ となる。そこで

(ア) $0\leqq a\leqq e^{-\sqrt{2}}$ のときは下図より面積 $S(a)$ は

a の値を変化させて直線 $y=ax$ を動かしていき，求める面積の形を調べていく。



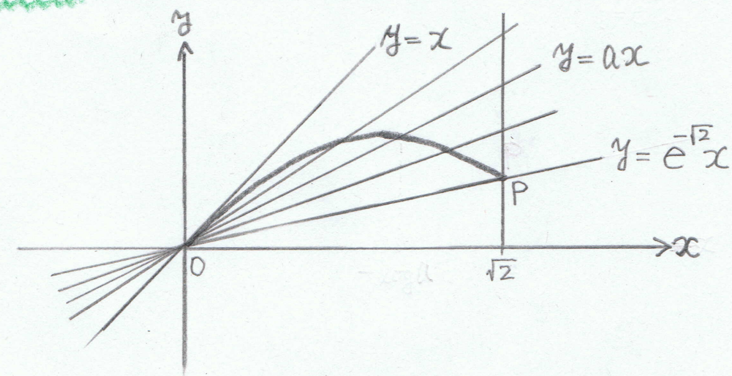
$$S(a)=\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x}dx-\int_0^{\sqrt{2}} ax\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x}dx-\frac{a}{2}\Big[x^2\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x}dx}_{定数}-a$$

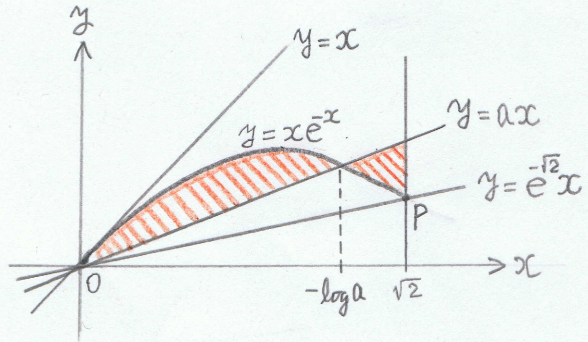
すると $S'(a)=-1<0$ となる。

(イ) $e^{-\sqrt{2}}<a<1$ のときは下図のようになる。



$y=xe^{-x}$ と $y=ax$ の交点を求めてみよう。

$$xe^{-x}=ax$$
$$x(e^{-x}-a)=0$$
$$x=0,\quad e^{-x}-a=0$$
$$e^{-x}=a$$
$$-x=\log a$$
$$\therefore x=-\log a$$



そこで

$$S(a)=\int_0^{-\log a}(xe^{-x}-ax)dx+\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}(ax-xe^{-x})dx$$

$$=\int_0^{-\log a}xe^{-x}dx-\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}xe^{-x}dx-\int_0^{-\log a}ax\,dx+\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}ax\,dx$$

$$=\Big[x(-e^{-x})\Big]_0^{-\log a}-\int_0^{-\log a}(-e^{-x})dx-\Big[x(-e^{-x})\Big]_{-\log a}^{\sqrt{2}}+\int_{-\log a}^{\sqrt{2}}(-e^{-x})dx-\frac{a}{2}\Big[x^2\Big]_0^{-\log a}+\frac{a}{2}\Big[x^2\Big]_{-\log a}^{\sqrt{2}}$$

$$=-\log a(-e^{\log a})-\Big[e^{-x}\Big]_0^{-\log a}-\left\{\sqrt{2}(-e^{-\sqrt{2}})-(-\log a)(-e^{\log a})\right\}+\Big[e^{-x}\Big]_{-\log a}^{\sqrt{2}}$$
$$-\frac{a}{2}(-\log a)^2+\frac{a}{2}\left\{(\sqrt{2})^2-(-\log a)^2\right\}$$

$$=-\log a\cdot(-a)-(e^{\log a}-1)-\left\{-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}-(-\log a)(-a)\right\}+e^{-\sqrt{2}}-e^{\log a}$$
$$-\frac{a}{2}(\log a)^2+\frac{a}{2}\left\{2-(\log a)^2\right\}$$

$$=a\log a-a+1+\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}+a\log a+e^{-\sqrt{2}}-a-\frac{a}{2}(\log a)^2+a-\frac{a}{2}(\log a)^2$$
$$=-a(\log a)^2+2a\log a-a+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}+1$$

すると

$$S'(a)=-1(\log a)^2+(-a)\cdot 2\log a\cdot\frac{1}{a}+2\log a+2a\cdot\frac{1}{a}-1$$
$$=-(\log a)^2-2\log a+2\log a+2-1$$
$$=1-(\log a)^2$$
$$=(1+\log a)(1-\log a)$$

$S'(a) = (1+\log a)(1-\log a)$

$e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ のときだから　$1-\log a > 0$

$S'(a) = 0$ とすると　$1+\log a = 0$

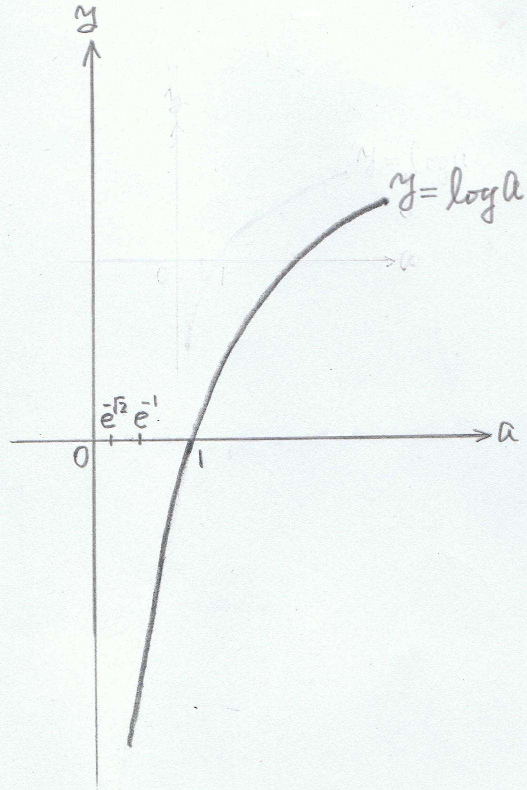
$\log a = -1$

$\therefore\ a = e^{-1}$

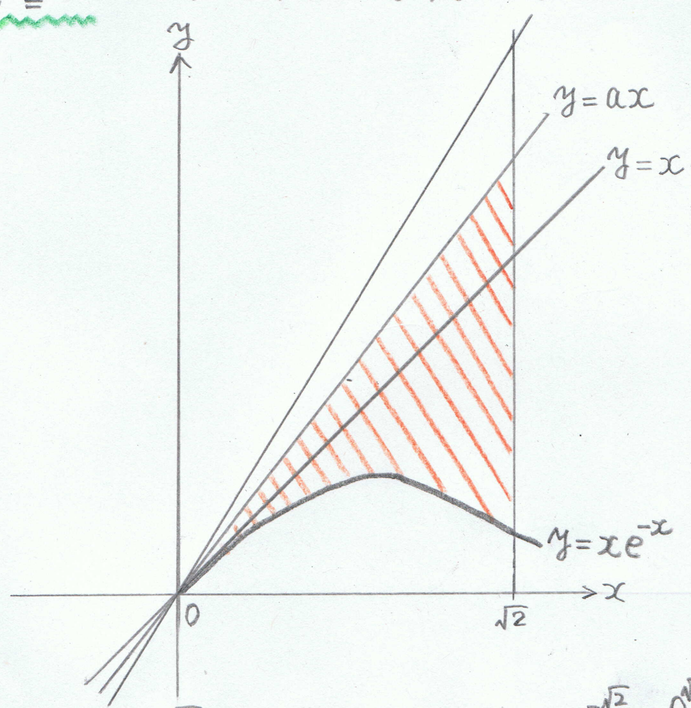
$e^{-\sqrt{2}} < a < 1$ の範囲で $S'(a)$ の符号を調べると

$e^{-\sqrt{2}} < a < e^{-1}$ のとき　$S'(a) < 0$

$e^{-1} < a < 1$ のとき　$S'(a) > 0$



(ウ) $1 \leqq a$ のときは下図のようになる



$$S(a) = \int_0^{\sqrt{2}} (ax - xe^{-x})\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x}\,dx = a - \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x}\,dx}_{定数}$$

すると　$S'(a) = 1 > 0$

したがって (ア), (イ), (ウ) より $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0		$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		1	
$S'(a)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$S(a)$		↘		↘	最小	↗		↗

よって　最小値は

$$S(e^{-1}) = -e^{-1}(\log e^{-1})^2 + 2e^{-1}\log e^{-1} - e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1$$
$$= -e^{-1} - 2e^{-1} - e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1 = \underline{-4e^{-1} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1}$$