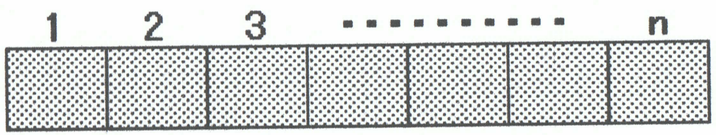
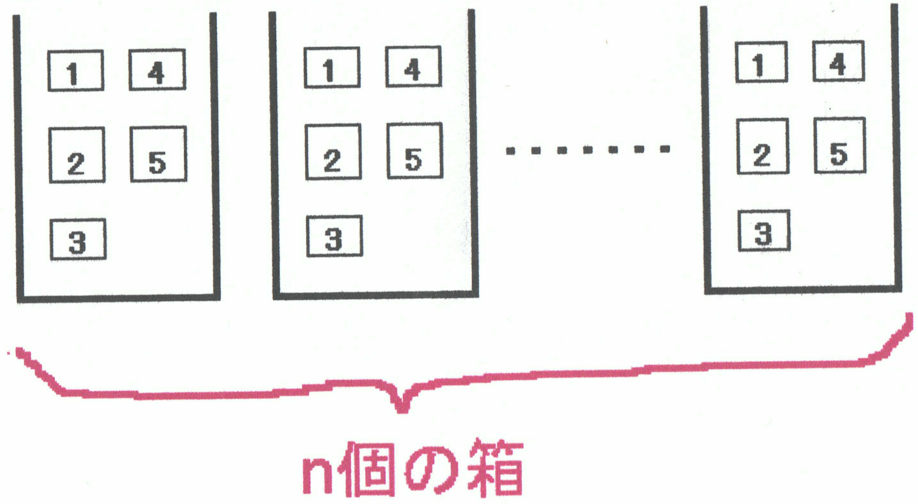
$\boxed{6}$

n を自然数とする．n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている．各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る．このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ．

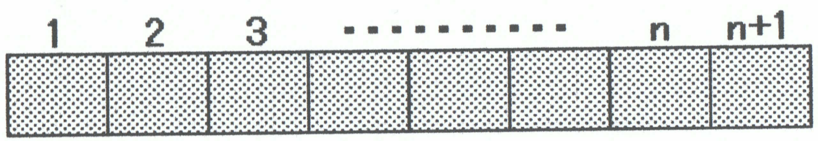
n個の箱から1枚ずつカードを取り出し、
取り出した順にカードを並べてn桁の数を作る。
このn桁の数が3で割り切れる確率を求める。

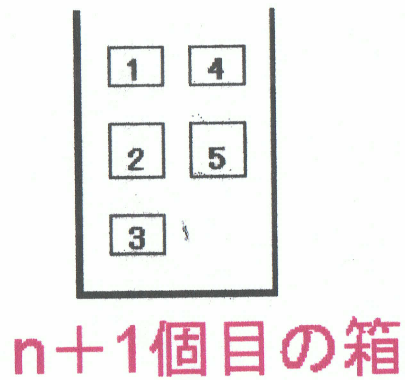




この数が3でわりきれる確率 a_n

更にn＋1個目の箱があると考えて、ここから1枚取り出して
後ろに付け加えて、n+1桁の数を作る。

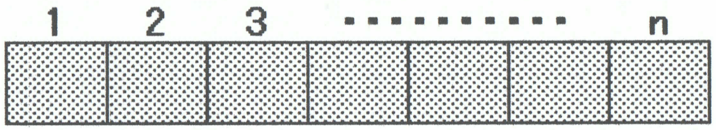




この数が3でわりきれる確率 a_{n+1}

a_n と a_{n+1} の関係を見つけていく!!

n個の箱からカードを取り出し、n桁の数を作る。



このn桁の数を3で割ったとき

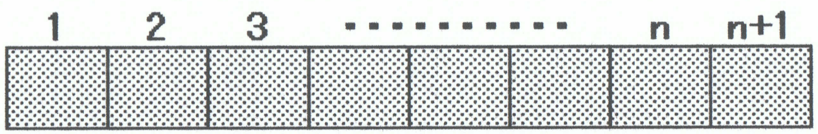
割り切れる確率･･･ a_n

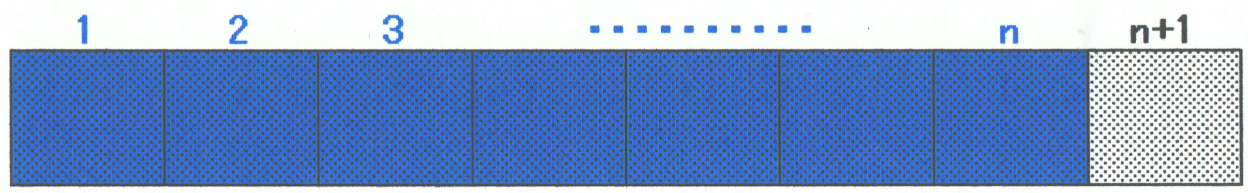
1余る確率･････････ b_n

2余る確率･････････ c_n

このとき　$a_n+b_n+c_n=1$　である。

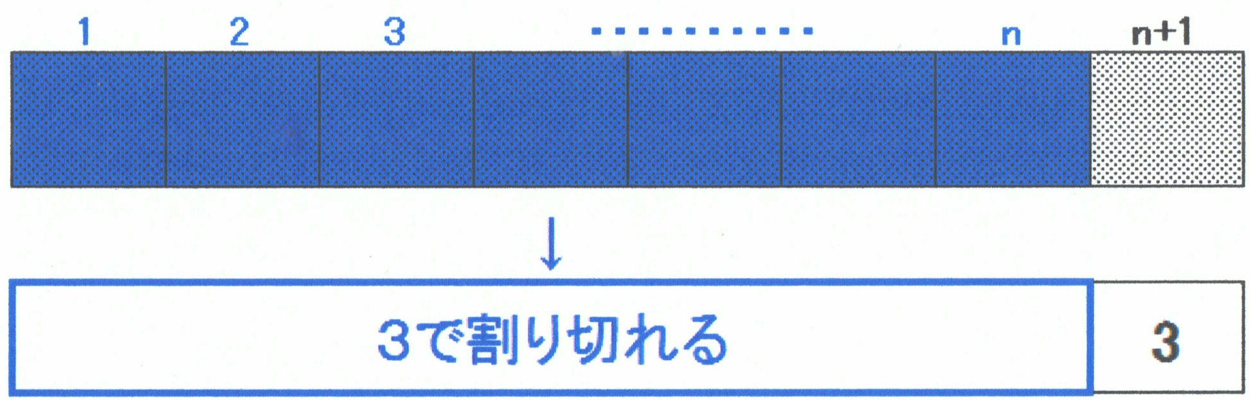
更にn＋1個目の箱があると考えて、ここから1枚取り出して後ろに付け加えて、n+1桁の数を作る。

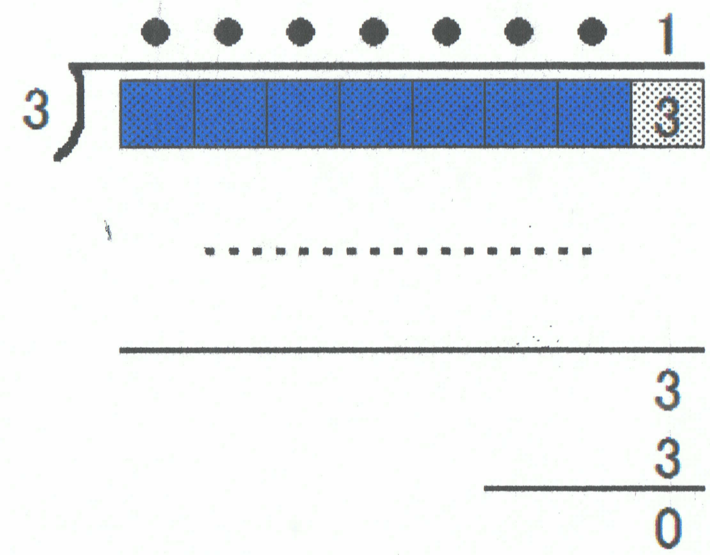


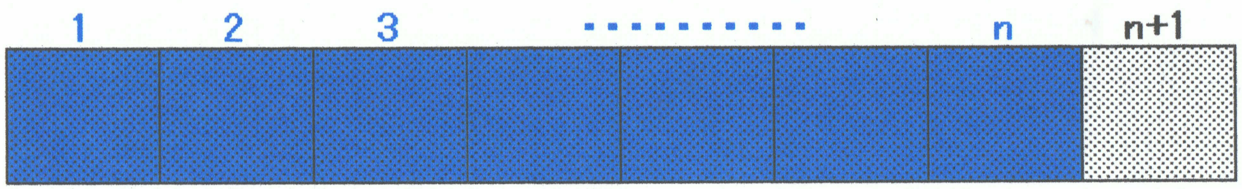


このn+1桁の数が3で割り切れる場合は

(ア)　n桁の数が3で割り切れるときに　n+1個目が3の場合

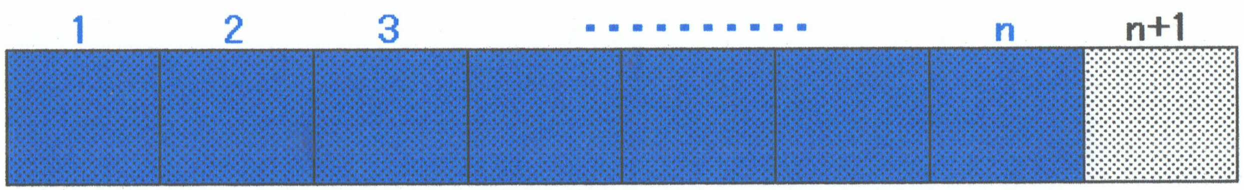






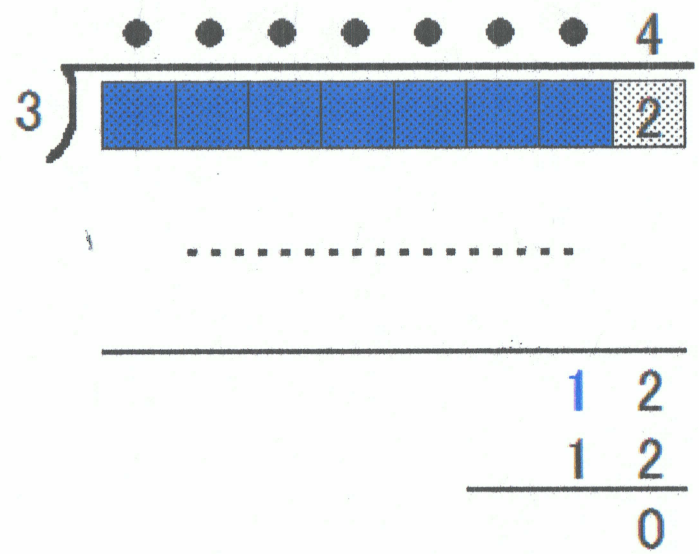
このn+1 桁の数が3で割り切れる場合は

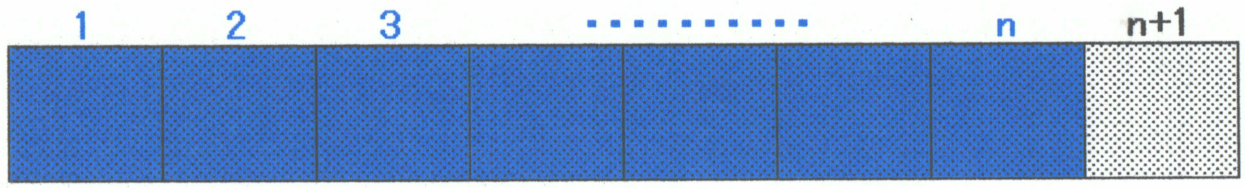
(イ)　n桁の数が1 余るときに　　　　n+1 個目が2または5の場合



↓

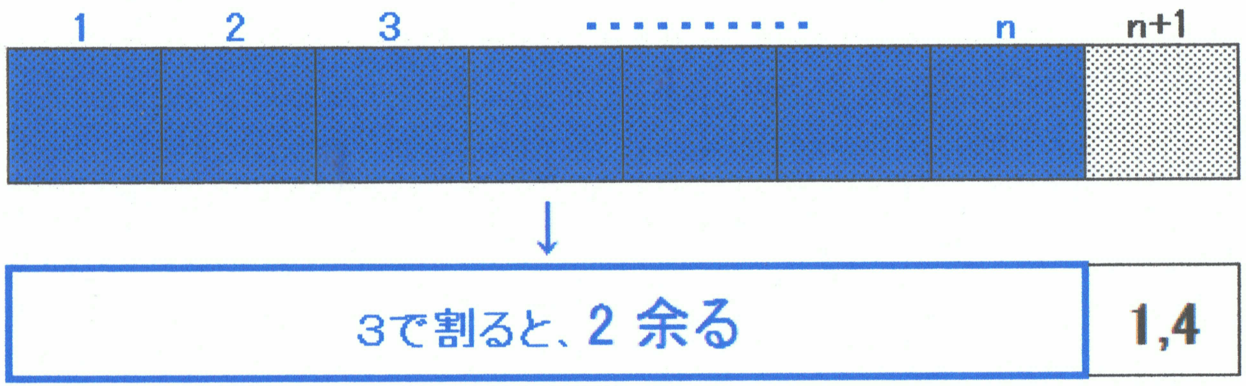
3で割ると、1 余る	2,5

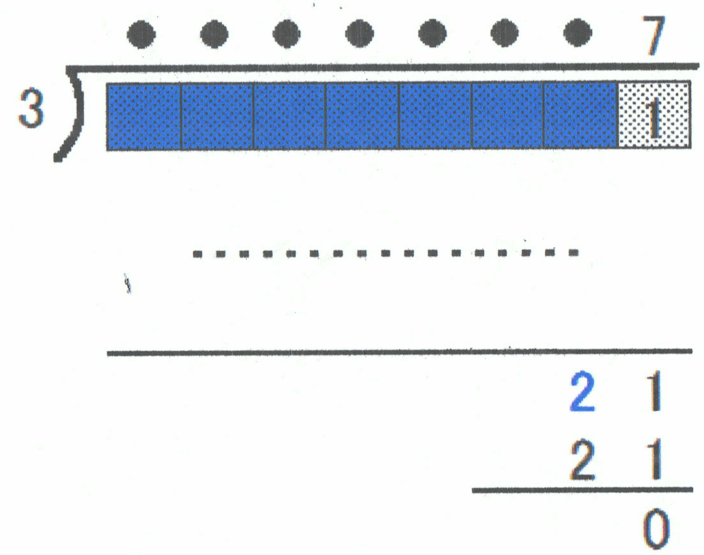




このn+1桁の数が3で割り切れる場合は

(ウ)　n桁の数が2余るときに　　　n+1個目が1または4の場合





この$n+1$桁の数が3で割り切れる場合は

(ア)　n桁の数が3で割り切れるときに　$n+1$個目が3の場合

(イ)　n桁の数が1余るときに　$n+1$個目が2または5の場合

(ウ)　n桁の数が2余るときに　$n+1$個目が1または4の場合

そこで、この$n+1$桁の数を3で割ったとき
割り切れる確率を　a_{n+1}　とする。

n桁の数を3で割ったとき	
割り切れる確率	a_n
1余る確率	b_n
2余る確率	c_n

5枚のカードから	
3を取り出す確率	1/5
2または5を取り出す確率	2/5
1または4を取り出す確率	2/5

(ア)　n桁の数が3で割り切れるとき(確率a_n)に　$n+1$個目が3(確率1/5)の場合

$a_n \times (1/5)$

(イ)　n桁の数が1余るとき(確率b_n)に　$n+1$個目が2または5(確率2/5)の場合

$b_n \times (2/5)$

(ウ)　n桁の数が2余るとき(確率c_n)に　$n+1$個目が1または4(確率2/5)の場合

$c_n \times (2/5)$

したがって、

$$a_{n+1} = a_n \times (1/5) + b_n \times (2/5) + c_n \times (2/5)$$

この$n+1$桁の数を3で割ったとき　割り切れる確率を　a_{n+1}　とすると

$$a_{n+1} = a_n \times (1/5) + b_n \times (2/5) + c_n \times (2/5)$$

$$= (1/5)a_n + (2/5)(b_n + c_n)$$

ここで、　$a_n + b_n + c_n = 1$　であるから　$b_n + c_n = 1 - a_n$　より

$$a_{n+1} = (1/5)a_n + (2/5)(1 - a_n)$$

$$= (-1/5)a_n + (2/5)$$　← 確率漸化式

この漸化式から a_n を求める作業に入る。

$a_{n+1} = (-1/5)a_n + (2/5)$ ・・・・①

$p = (-1/5)p + (2/5)$ ・・・・② ← 特性方程式

①−②より

$a_{n+1} - p = (-1/5)(a_n - p)$ ・・・・③

②を解くと $p = 1/3$ だから、③は

$a_{n+1} - (1/3) = (-1/5)(a_n - (1/3))$

$$a_1-(1/3),\ \xrightarrow{\times(-1/5)} a_2-(1/3),\ \xrightarrow{\times(-1/5)} a_3-(1/3),\ \xrightarrow{\times(-1/5)} \cdots\cdots,\ \xrightarrow{\times(-1/5)} a_n-(1/3),\ \xrightarrow{\times(-1/5)} a_{n-1}-(1/3),\ \cdots\cdots$$

初項 $a_1-(1/3) = (1/5)-(1/3) = -2/15$ ←

公比 $-1/5$

の等比数列である。

a_1 は1個の箱からカードを取り出して
1桁の数を作ったとき
この数が3で割り切れる確率

$a_1 = 1/5$

$a_{n+1} - (1/3) = (-1/5)(a_n - (1/3))$

$a_1-(1/3) \xrightarrow{\times(-1/5)} a_2-(1/3) \xrightarrow{\times(-1/5)} a_3-(1/3) \xrightarrow{\times(-1/5)} \cdots\cdots \xrightarrow{\times(-1/5)} a_n-(1/3) \xrightarrow{\times(-1/5)} a_{n-1}-(1/3), \cdots\cdots$

初項 $a_1-(1/3)=(1/5)-(1/3)=-2/15$　公比　$-1/5$　の等比数列

その第n項は

$$a_n-(1/3) = (-2/15)\times(-1/5)^{n-1}$$

$$a_n = (1/3)+(-2/15)\times(-1/5)^{n-1}$$

$$= (1/3)+(-2/15)\times(-5)\times(-1/5)^{n}$$

$$= (1/3)+(2/3)(-1/5)^{n}$$

n個の箱からカードを取り出し、n桁の数を作る。

1	2	3	………			n

このn桁の数を3で割ったとき

割り切れる確率･･･ a_n