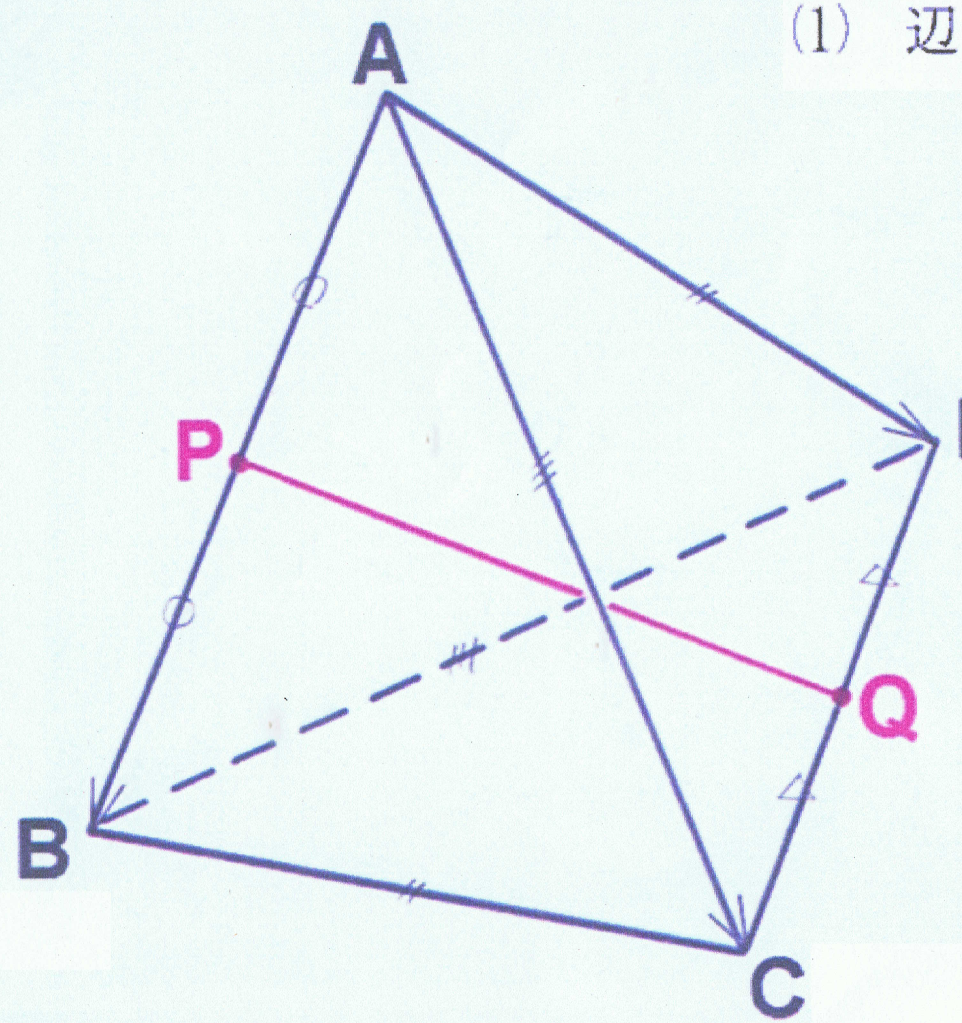
**6**

四面体ABCDは$AC = BD$，$AD = BC$を満たすとし，辺ABの中点をP，辺CDの中点をQとする．

(1) 辺ABと線分PQは垂直であることを示せ．

(2) 線分PQを含む平面$\alpha$で四面体ABCDを切って2つの部分に分ける．このとき，2つの部分の体積は等しいことを示せ．

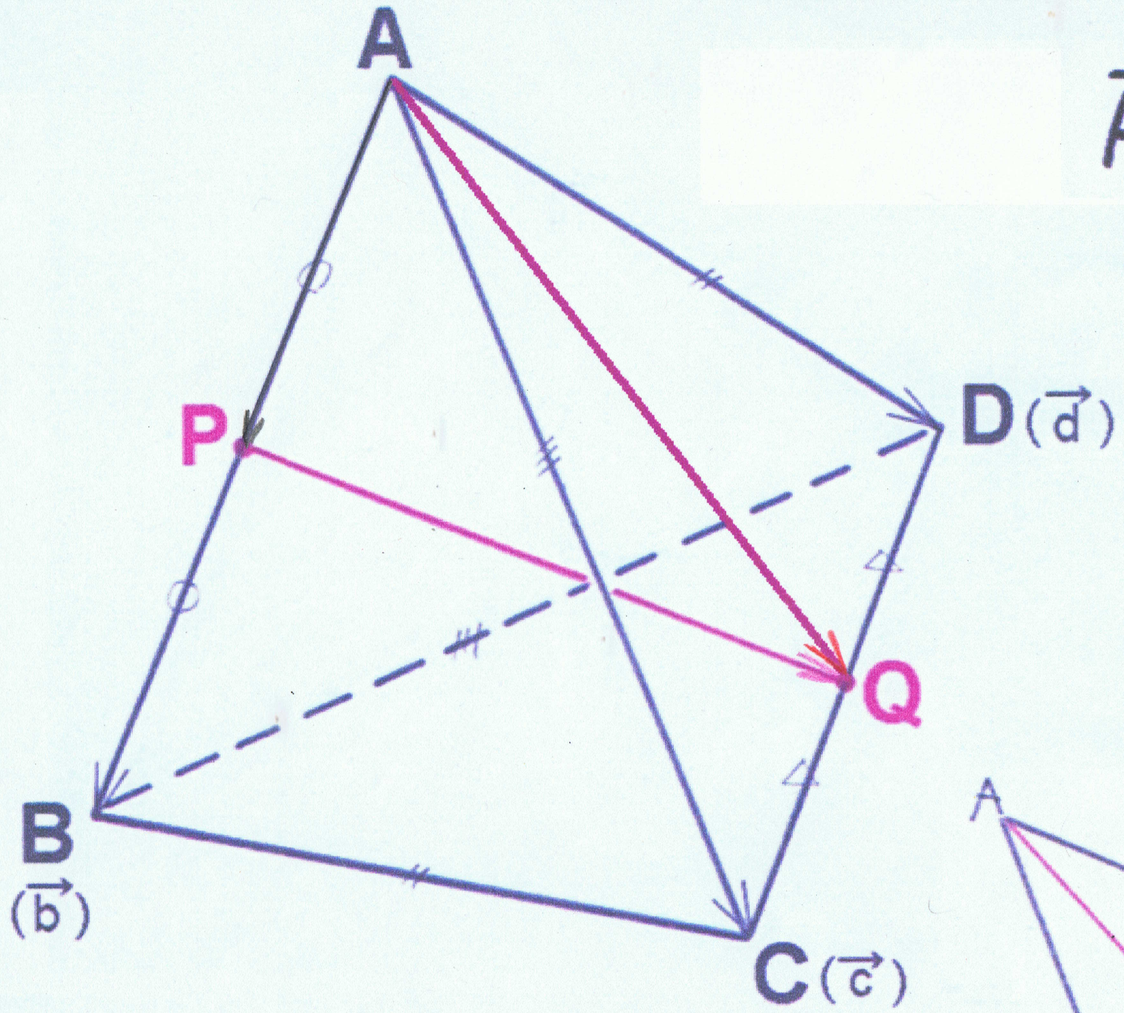
(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ.




AC＝BD , AD＝BC

AP＝PB , CQ＝QD

## $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ で表してみる。



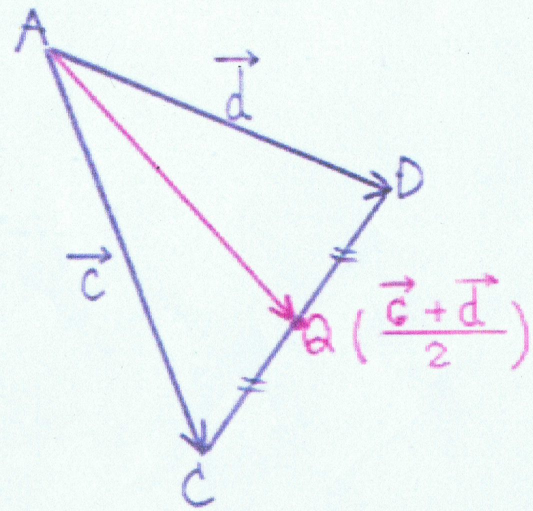

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \quad \overrightarrow{AC}=\vec{c}, \quad \overrightarrow{AD}=\vec{d}$$

とおくと

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$$

$$=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$$

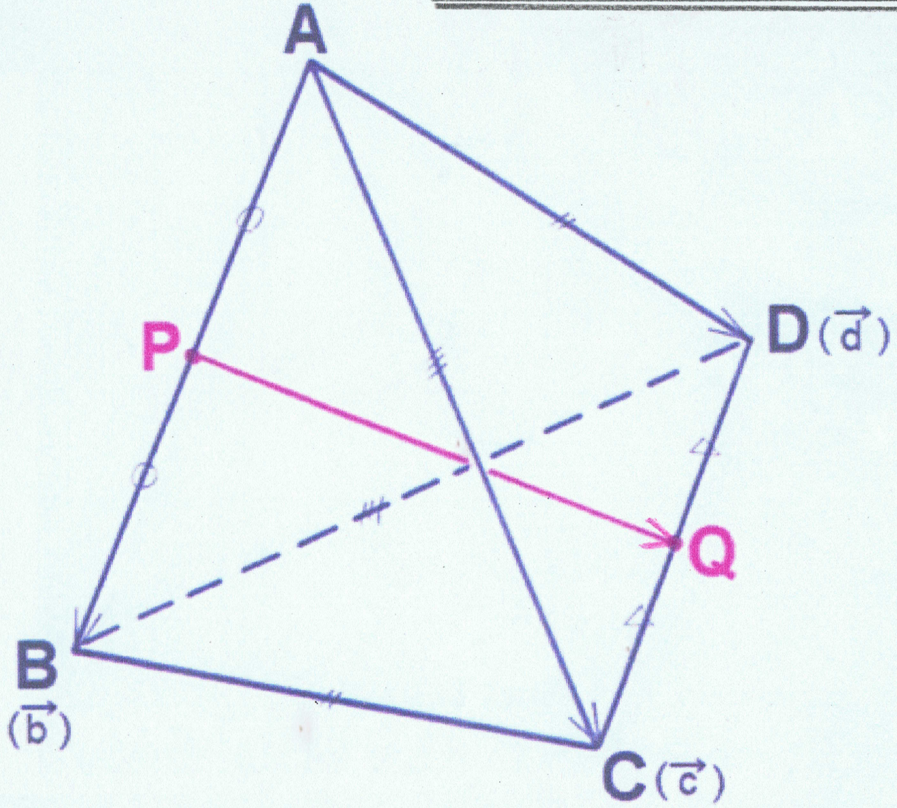
$$=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$




AC＝BD , AD＝BC

AP＝PB , CQ＝QD

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{PQ}$ の内積を求める。




AC＝BD , AD＝BC
AP＝PB , CQ＝QD

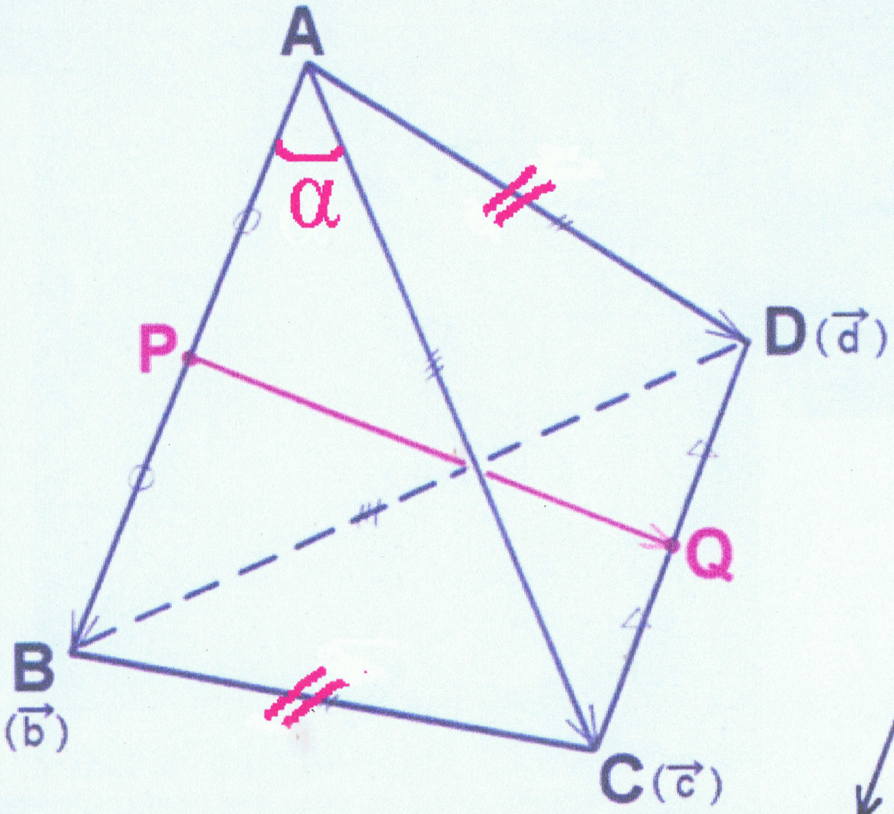
$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} = \vec{b}\cdot\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\underline{\vec{b}\cdot\vec{d}}-|\vec{b}|^2\right)$$



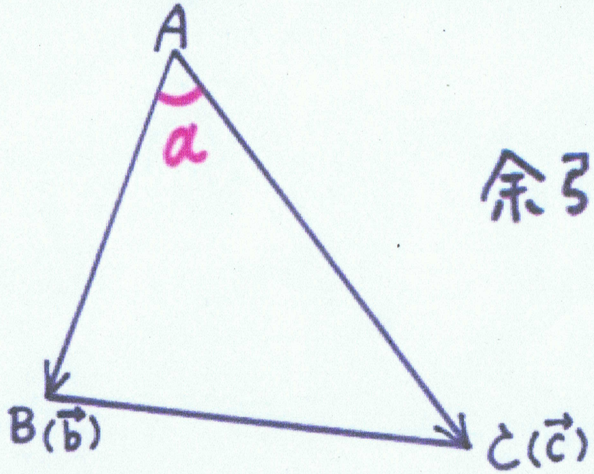

AC＝BD , AD＝BC

AP＝PB , CQ＝QD

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2\right)$$

ここで $\angle BAC=\alpha$ とおくと

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha$$

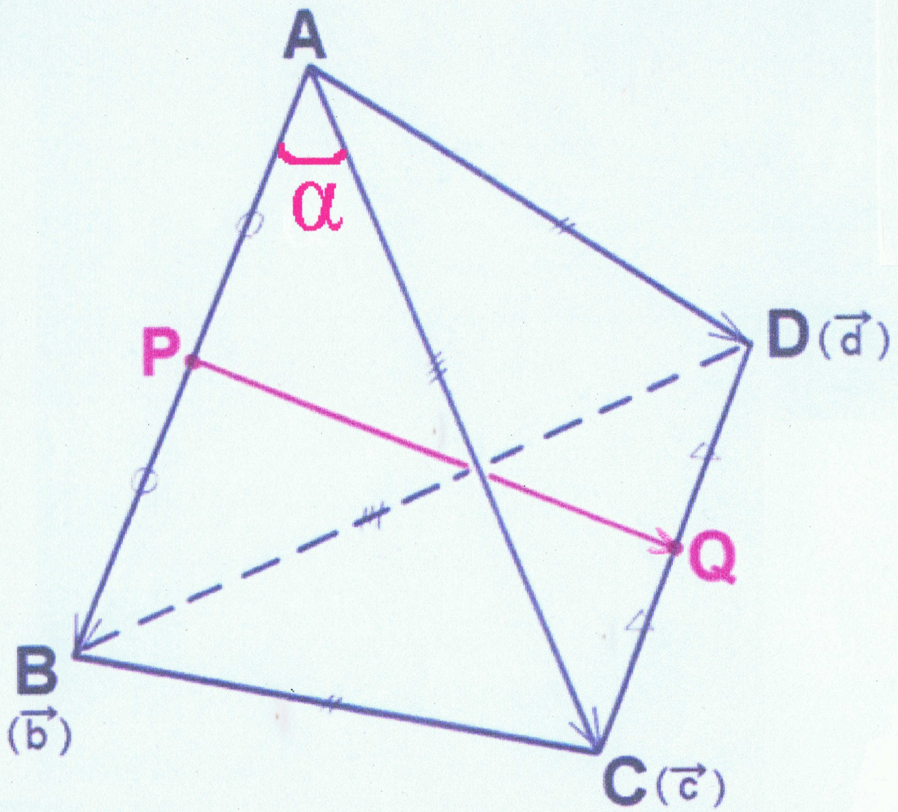



余弦定理より

BC=AD より

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2|\vec{b}||\vec{c}|}$$



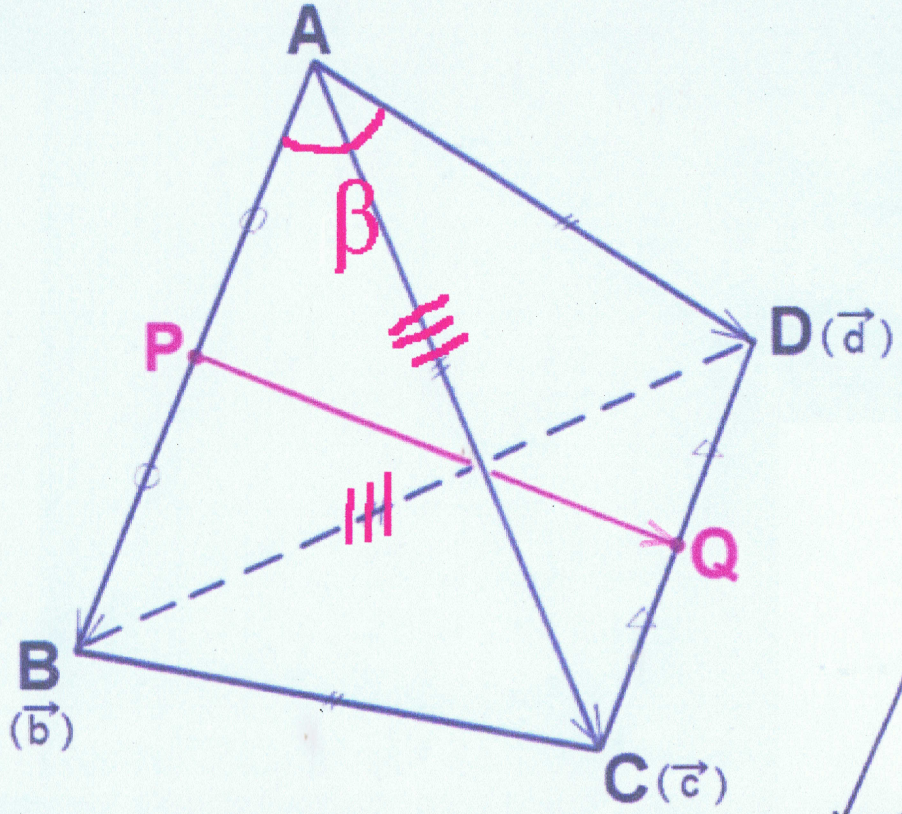

AC＝BD , AD＝BC
AP＝PB , CQ＝QD

cosαに代入すると

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\alpha$$

$$=|\vec{b}||\vec{c}|\times\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2|\vec{b}||\vec{c}|}$$

$$=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}\quad\cdots\cdots①$$

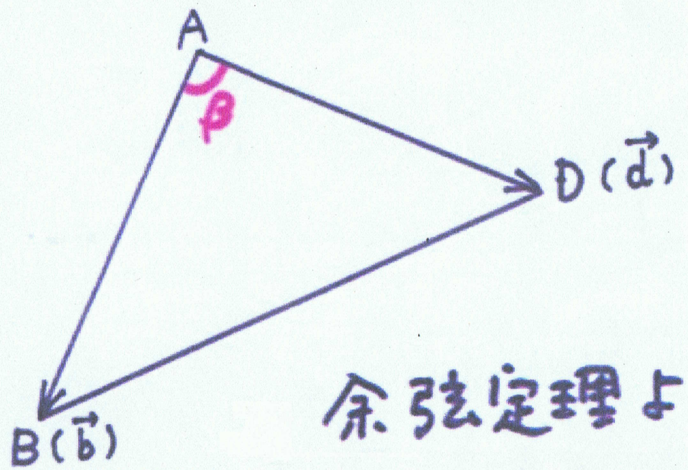



AC＝BD, AD＝BC
AP＝PB , CQ＝QD

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+\underline{\vec{b}\cdot\vec{d}}-|\vec{b}|^2\right)$$

$\angle BAD=\beta$ とおくと

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos\beta$$

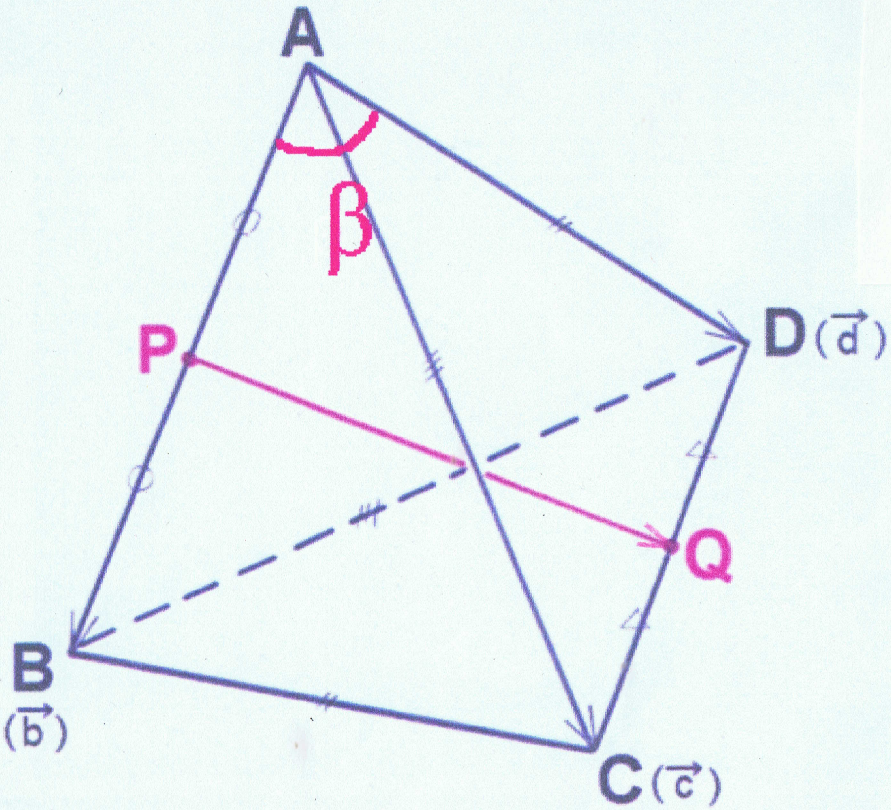



余弦定理より

BD＝ACより

$$BD^2=AB^2+AD^2-2\times AB\times AD\times\cos\beta$$

$$\cos\beta=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2\times AB\times AD}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2|\vec{b}||\vec{d}|}$$




AC＝BD , AD＝BC
AP＝PB , CQ＝QD

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2)$$

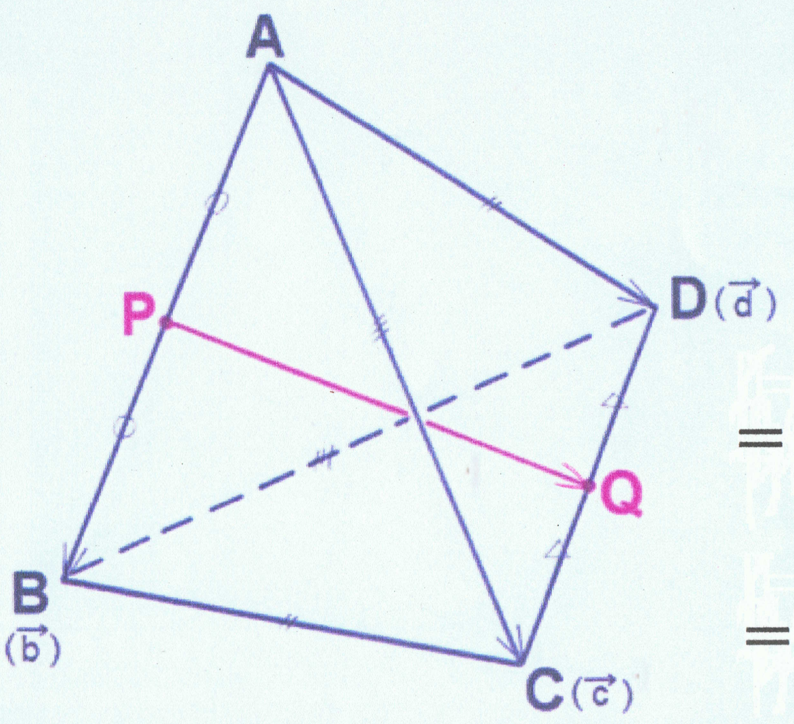
$\cos\beta$に代入すると

∠BAD＝β とおくと

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}||\vec{d}|\cos\beta$$

$$=|\vec{b}||\vec{d}|\times\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2|\vec{b}||\vec{d}|}$$

$$=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}\quad\cdots\cdots②$$




AC＝BD，AD＝BC
AP＝PB，CQ＝QD

したがって

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{b}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}+\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}-|\vec{b}|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2-2|\vec{b}|^2}{2}\right)$$

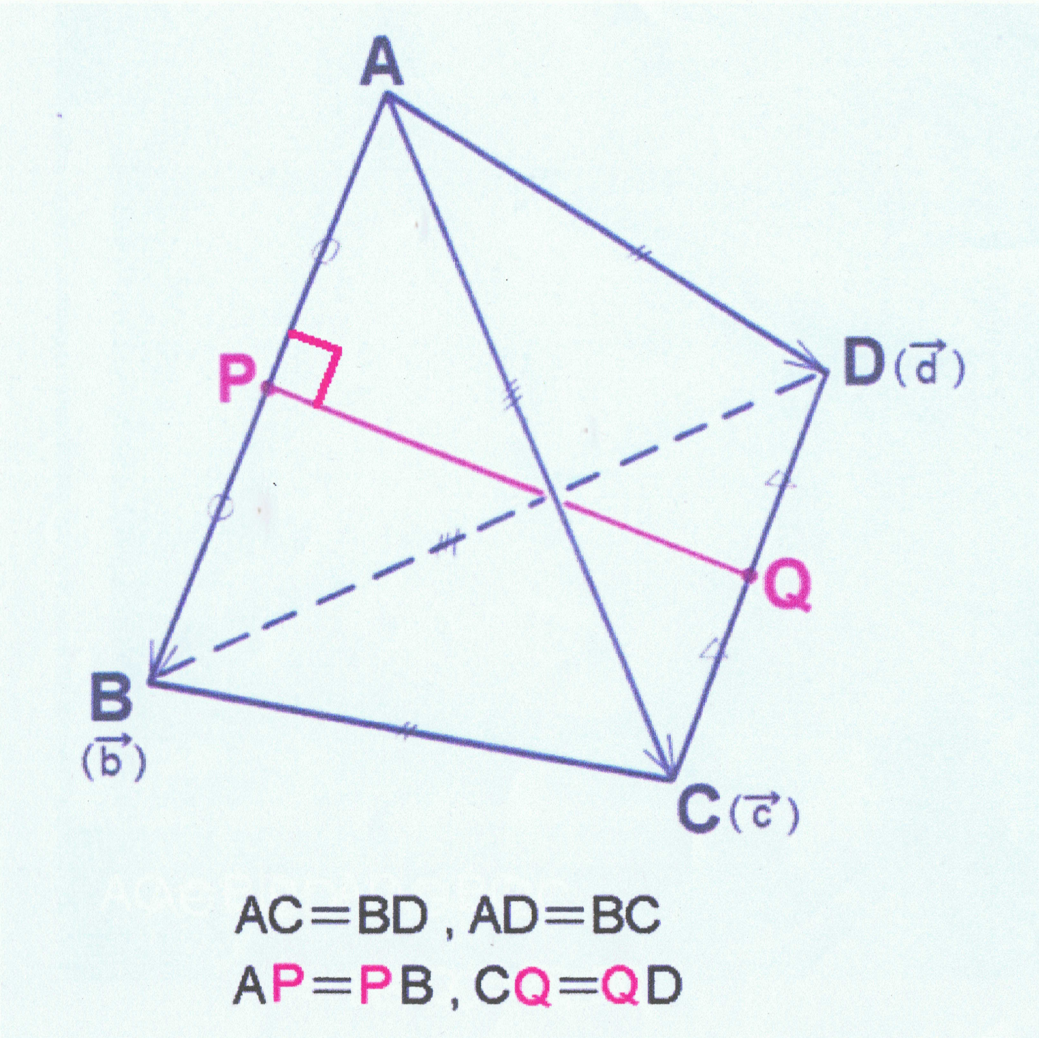
$$=\frac{1}{2}\times 0$$

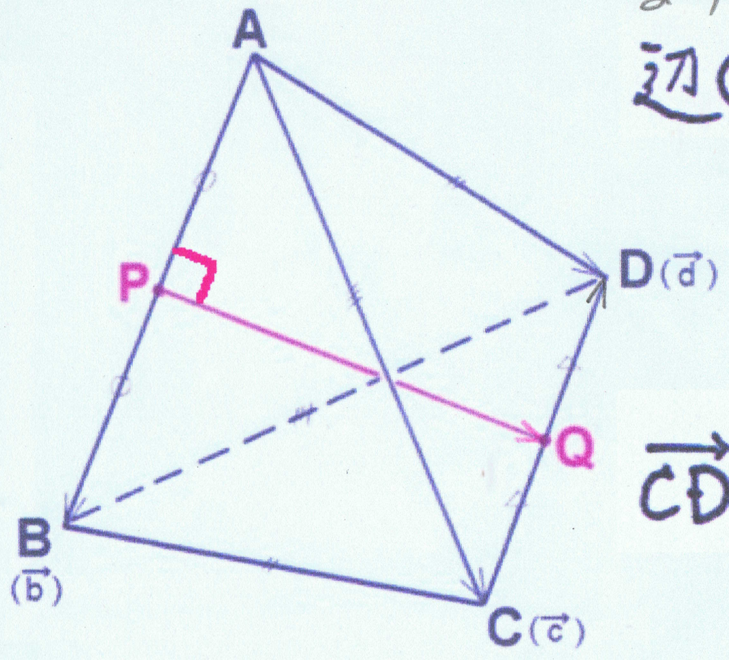
$$=0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PQ}$$

よって 辺ABと線分PQは垂直である。

(2)　線分 PQ を含む平面 $\alpha$ で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき， 2 つの部分の体積は等しいことを示せ．






AC=BD , AD=BC
AP=PB , CQ=QD

まず
辺CDと線分PQも垂直かどうか調べてみよう。

$$\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\vec{d}-\vec{c})\cdot\frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}}{2}$$

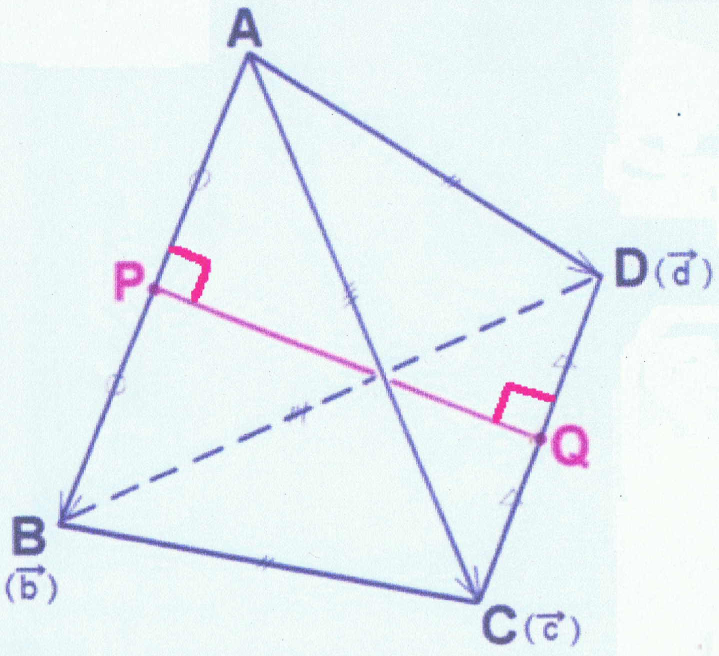
$$=\frac{1}{2}(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{d}\cdot\vec{c}+\vec{d}\cdot\vec{d}-\vec{d}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{b})$$

$$=\frac{1}{2}(|\vec{d}|^2-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})$$

ここで (1)で求めた①と②より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}, \quad \vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}$$ だから




AC＝BD，AD＝BC

AP＝PB，CQ＝QD

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2-\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2}{2}-|\vec{c}|^2+\frac{|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2|\vec{d}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{d}|^2+|\vec{c}|^2-2|\vec{c}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{d}|^2}{2}$$

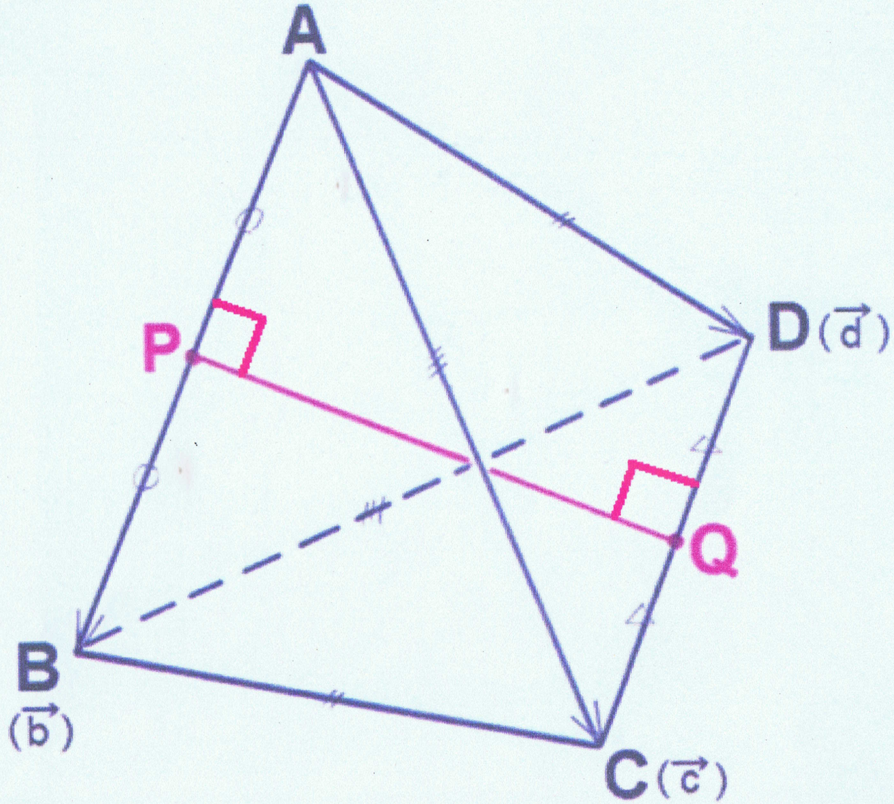
$$=\frac{1}{2}\times 0$$

$$=0$$

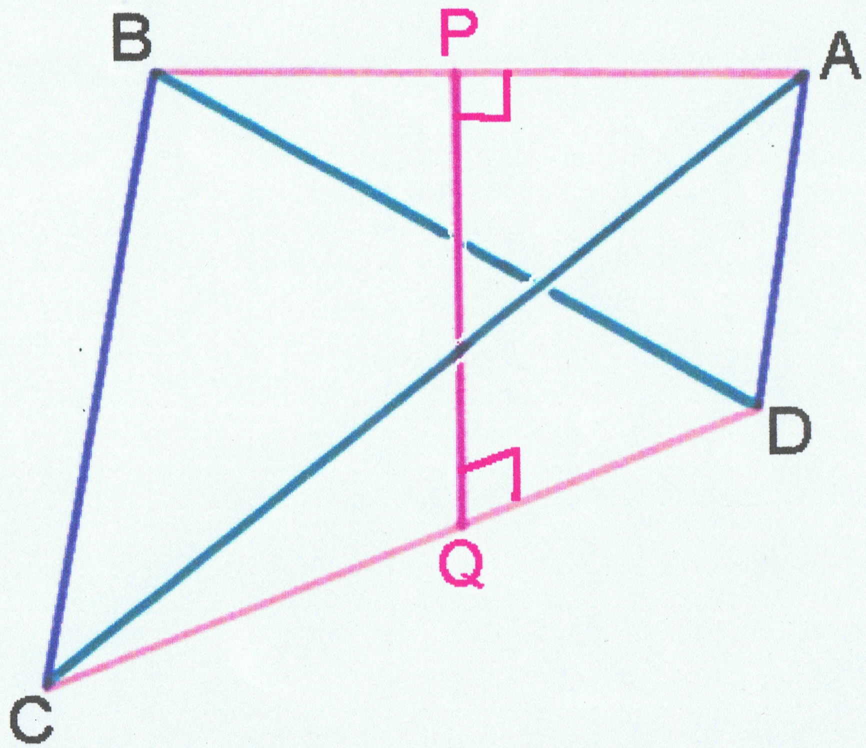
$$\therefore\ \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{PQ}$$

よって 辺CDと線分PQも垂直となっていることがわかる。

線分 PQ を含む平面 $\alpha$ で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける．このとき，２つの部分の体積は等しいことを示せ．



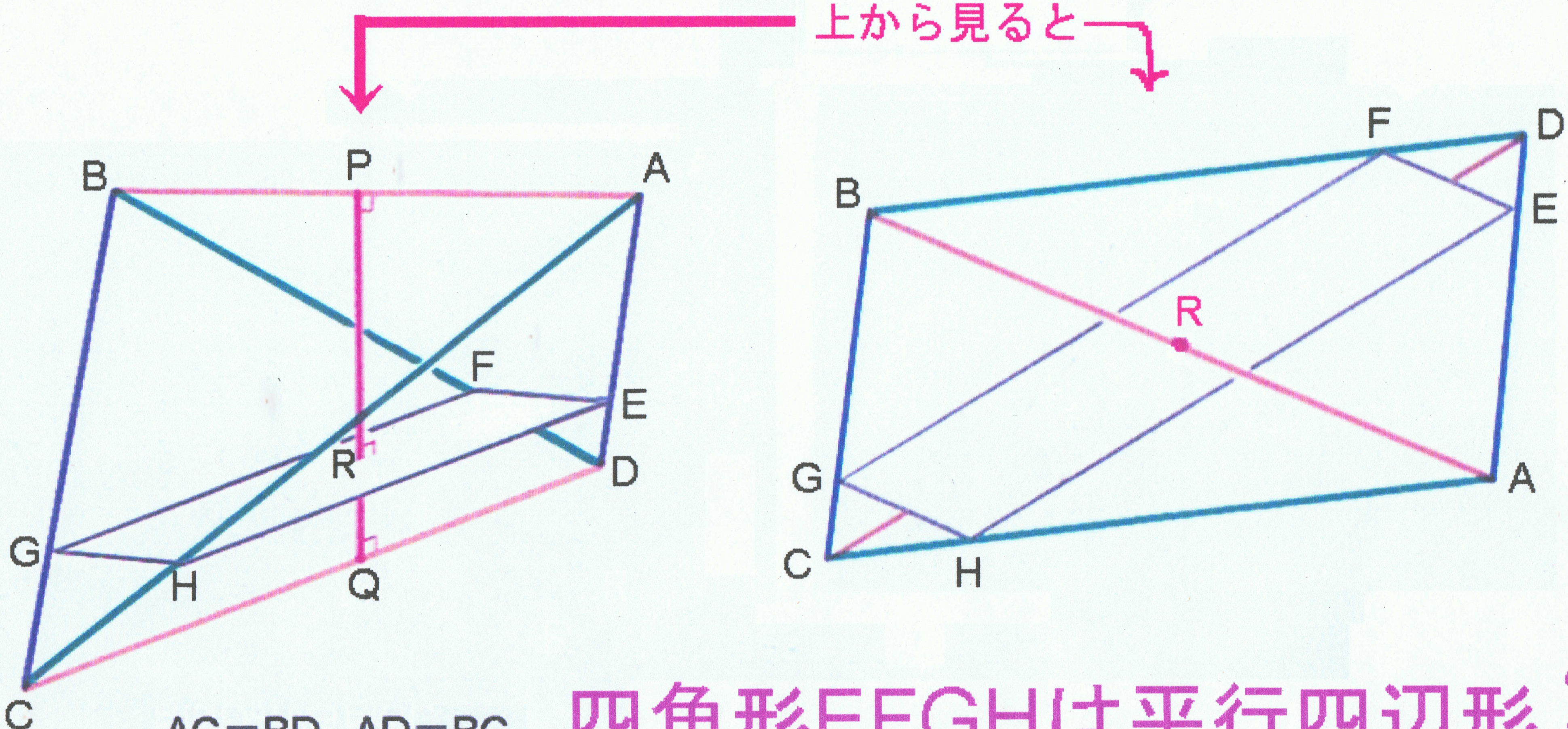

AC＝BD , AD＝BC
AP＝PB , CQ＝QD




(考えやすいように 線分PQが真中へくるように，回転させた．)

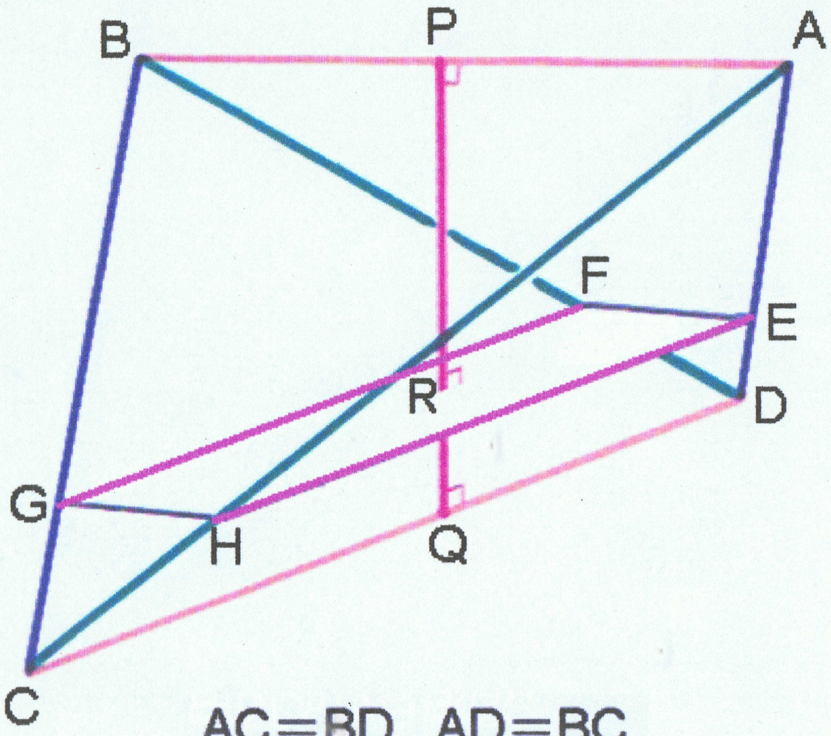
線分PQ上(両端を除く)の任意の点Rを通り PQに垂直な平面で、

四面体ABCDを切ったときの切り口を、平面EFGHとする。




AC＝BD , AD＝BC

四角形EFGHは平行四辺形??




AC＝BD , AD＝BC

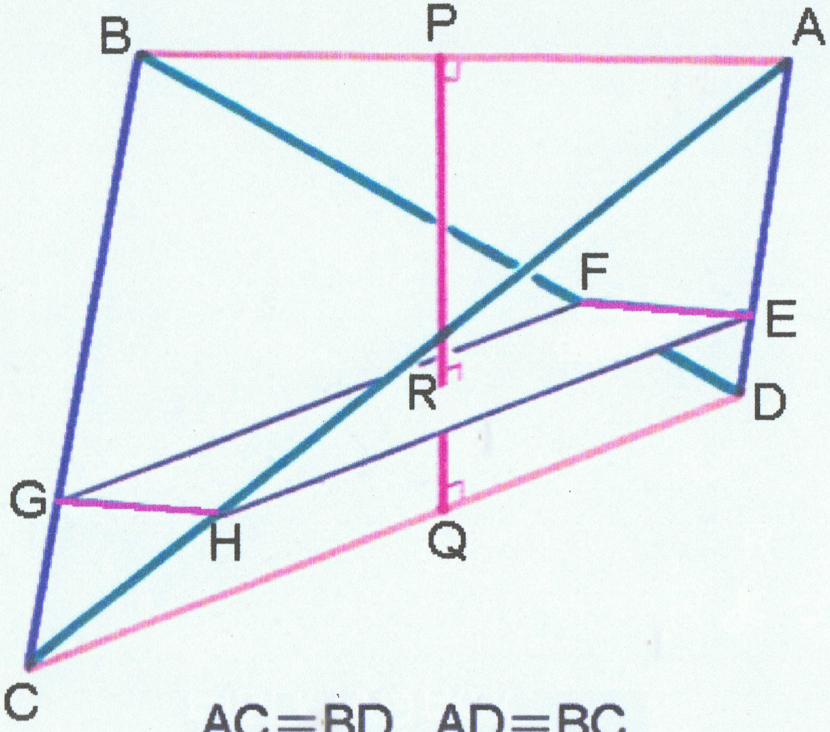
三角形ACDと四角形EFGHにおいて

CD // 四角形EFGH であり
EHは交線 だから
EH // CD ・・・・ア

三角形BCDと四角形EFGHにおいて

CD // 四角形EFGH であり
FGは交線 だから
FG // CD ・・・・イ

よって ア、イ より EH // FG ・・・・・・・③




AC＝BD , AD＝BC

同様にして
三角形ABDと四角形EFGHにおいて

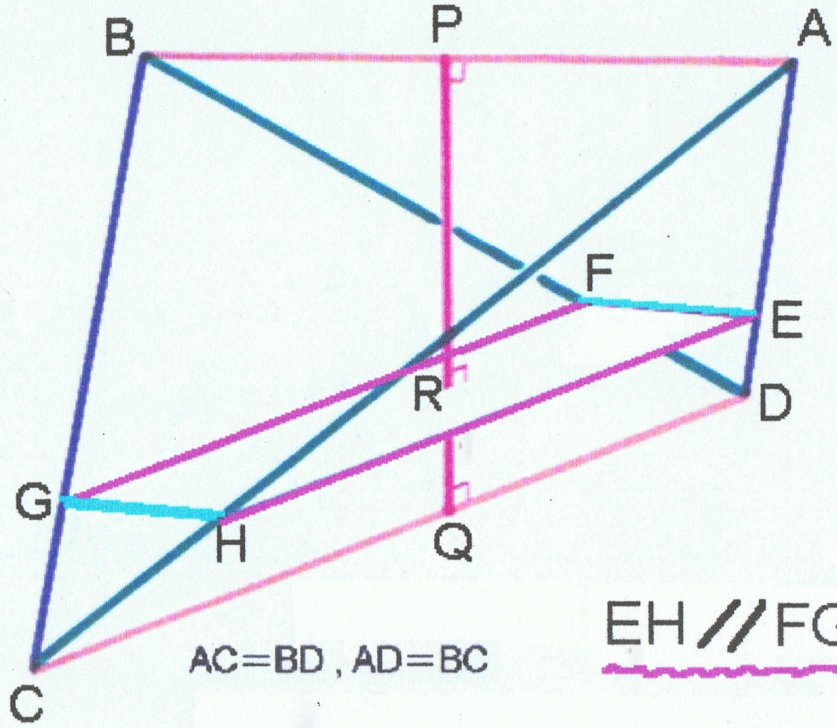
AB // 四角形EFGH であり
EFは交線 だから
EF // AB ・・・・ウ

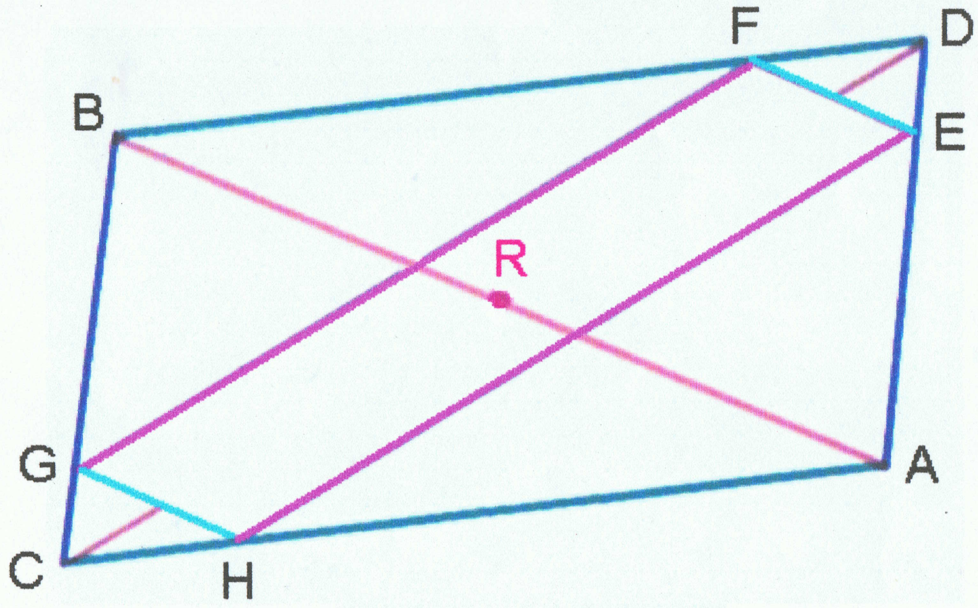
三角形ABCと四角形EFGHにおいて

AB // 四角形EFGH であり
GHは交線 だから
GH // AB ・・・・エ

よって ウ、エ より

EF // GH ・・・・・・・・④




EH // FG ・・・・・③　EF // GH ・・・・・④

したがって　③、④ より

四角形EFGHは、二組の対辺がそれぞれ平行であるから

平行四辺形である。

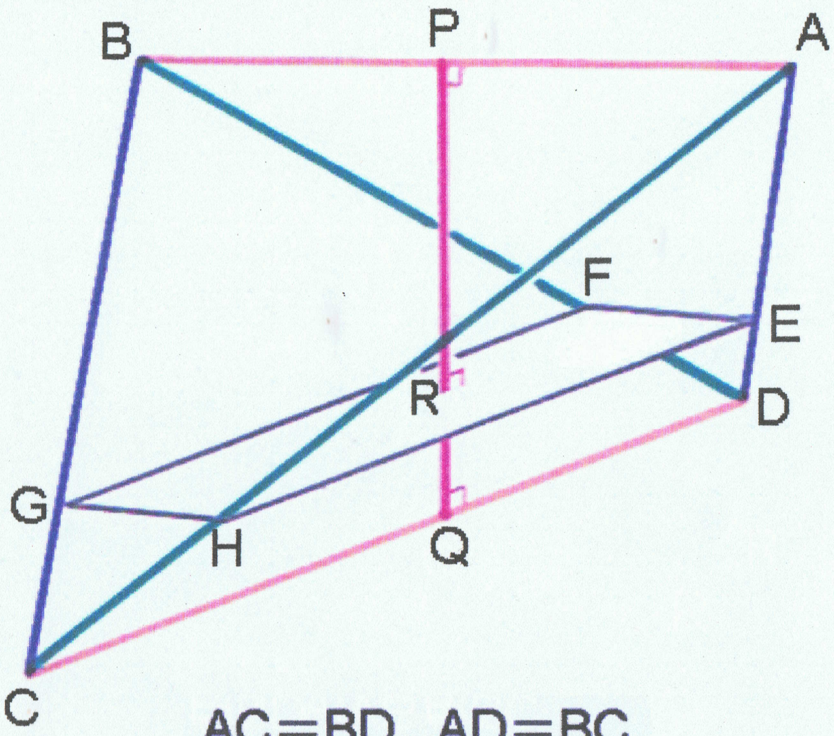
つまり

線分PQ上(両端を除く)の任意の点Rを通り PQに垂直な平面で、

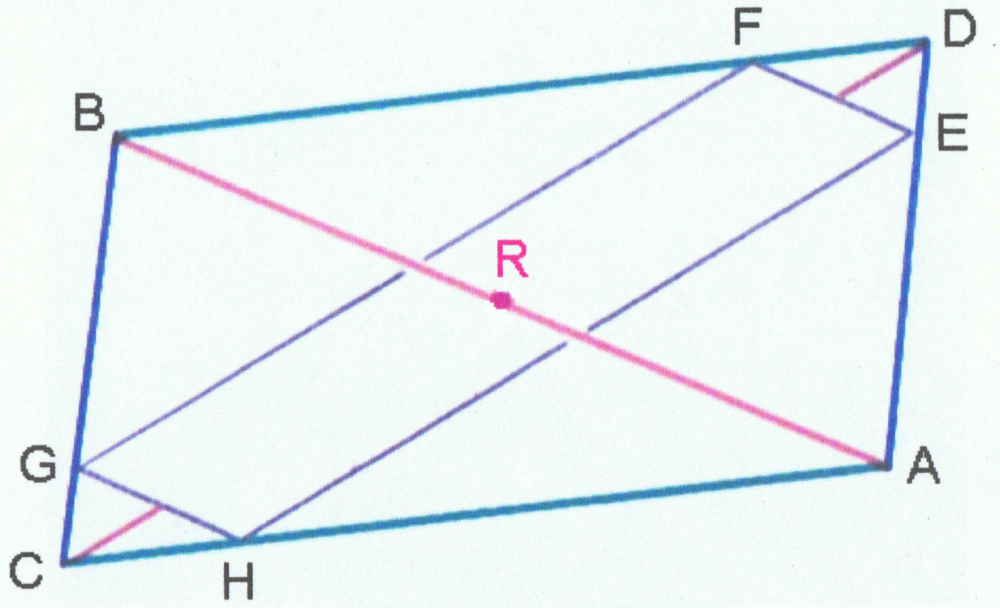
四面体ABCDを切ったときの切り口は 平行四辺形 である。

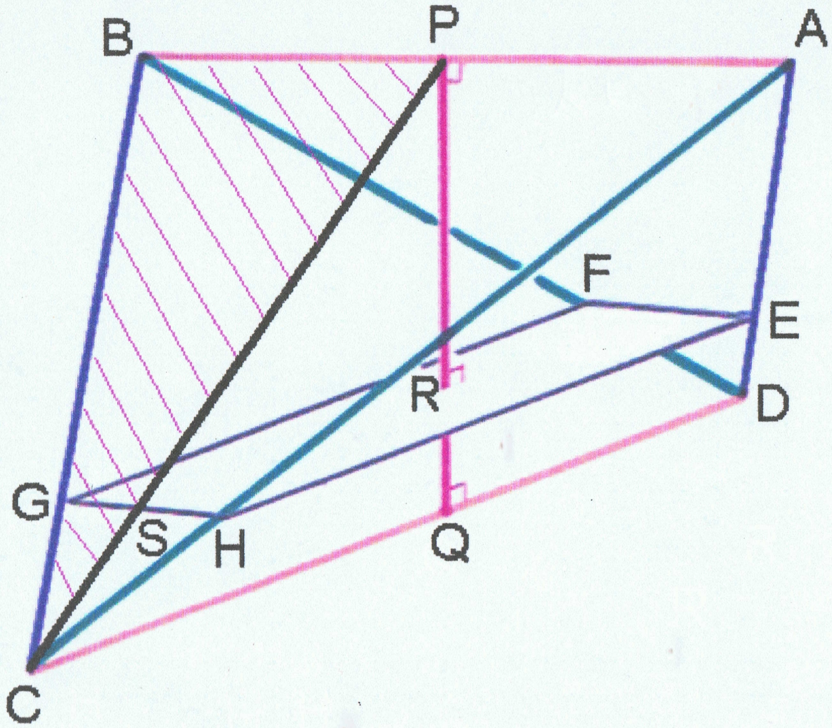
次に

点Rの位置を調べます。




AC＝BD , AD＝BC



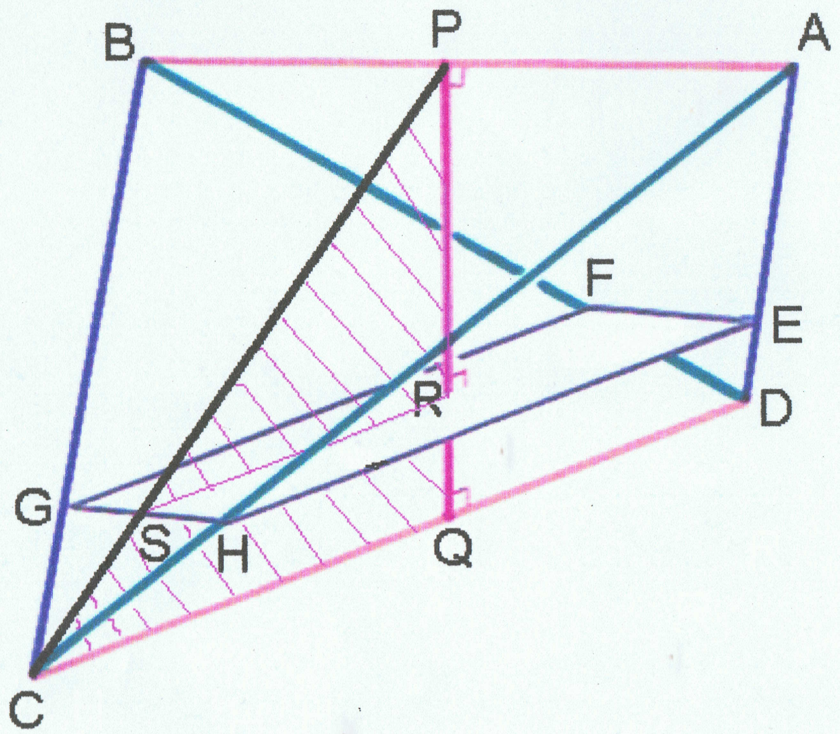



PCとGHの交点をSとする。

三角形BPCにおいて

BP // GSより

BG : GC = PS : SC ・・・・オ




PCとGHの交点をSとする。

三角形BPCにおいて

BP//GSより

BG : GC = PS : SC ・・・・オ

三角形PCQにおいて

SRは三角形PCQと四角形EFGHの交線

だから SR//CQとなるので

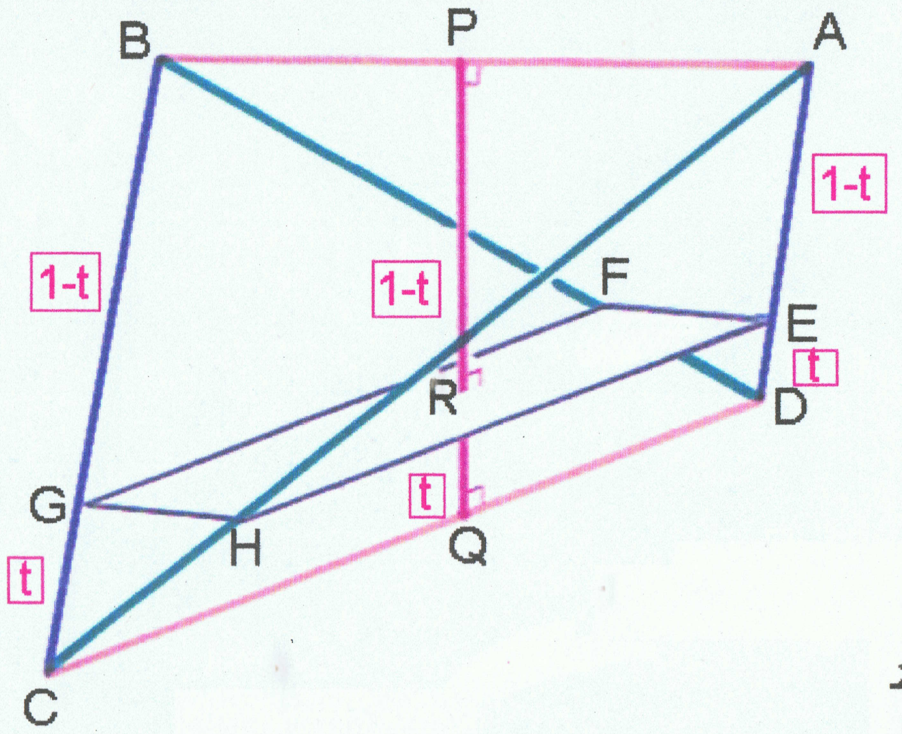
PS : SC = PR : RQ ・・・・カ

よって オ、カ より BG : GC = PR : RQ ・・・・キ

また △BAC≡△ABD (三辺相等) であり EF//HG かつ EF=HG であるから

BG : GC = AE : ED ・・・・ク

したがって キ、ク より BG : GC = AE : ED = PR : RQ となる。



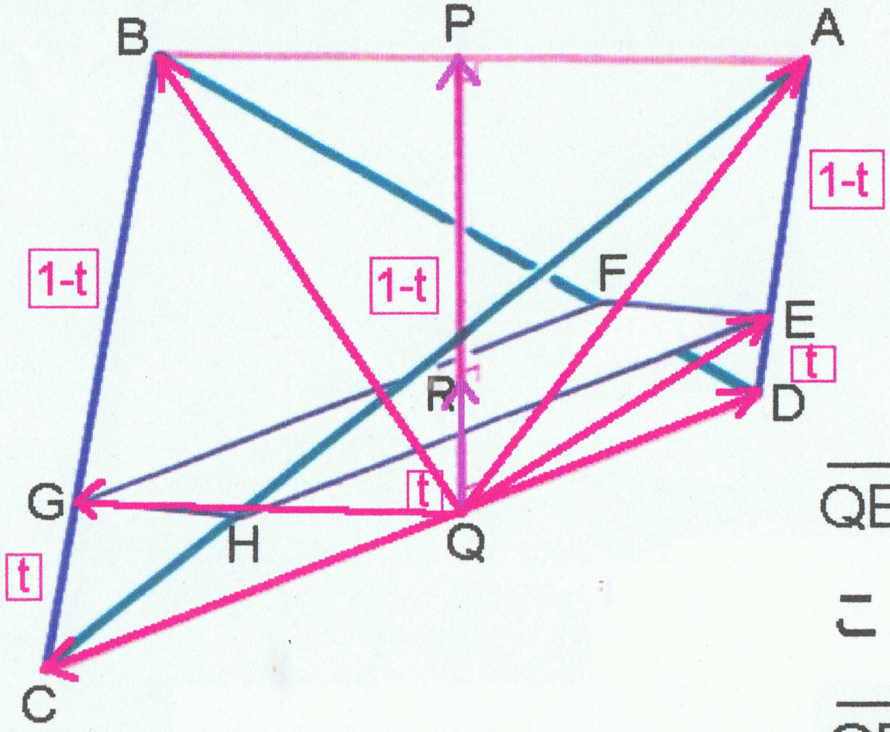

BG : GC = AE : ED = PR : RQ

そこで　実数 t を $0<t<1$ とすると

BG : GC = AE : ED = PR : RQ = 1−t ： t

とおける。

$BG : GC = AE : ED = PR : RQ = \boxed{1-t} : \boxed{t}$




$\overrightarrow{QE} = (1-t)\overrightarrow{QD} + t\overrightarrow{QA}$ ・・・・⑤

$\overrightarrow{QG} = (1-t)\overrightarrow{QC} + t\overrightarrow{QB}$ ・・・・⑥

⑤＋⑥ より

$\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QG} = (1-t)(\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QC}) + t(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})$

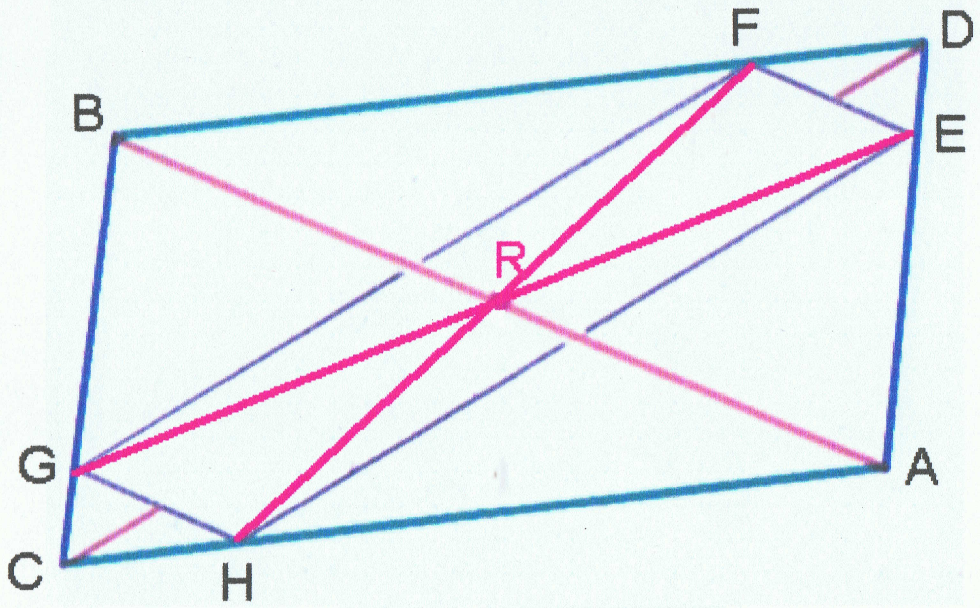
ここで　$\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QC} = \vec{0}$　だから

$\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QG} = t(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})$

両辺を２で割ると

$$\frac{\overrightarrow{QE} + \overrightarrow{QG}}{2} = \frac{t(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})}{2} = t \cdot \frac{(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB})}{2} = t\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QR}$$

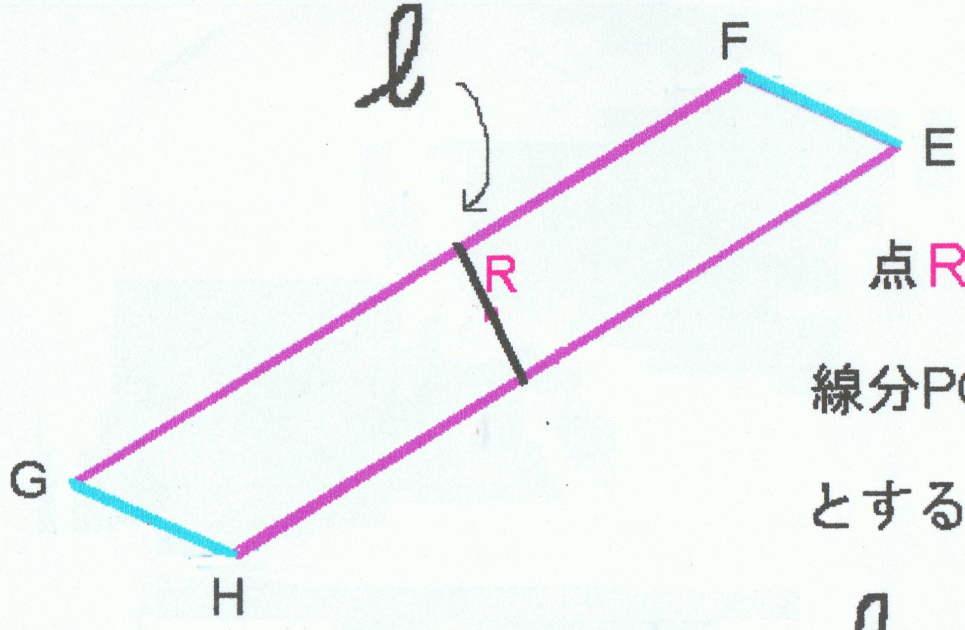
すなわち　点RはEGの中点になっている。




点RはEGの中点、つまり平行四辺形EFGHの対角線EGの中点となっている。

したがって 点Rは平行四辺形EFGHの２本の対角線の交点であるから

平行四辺形EFGHの中心となっていることがわかった。



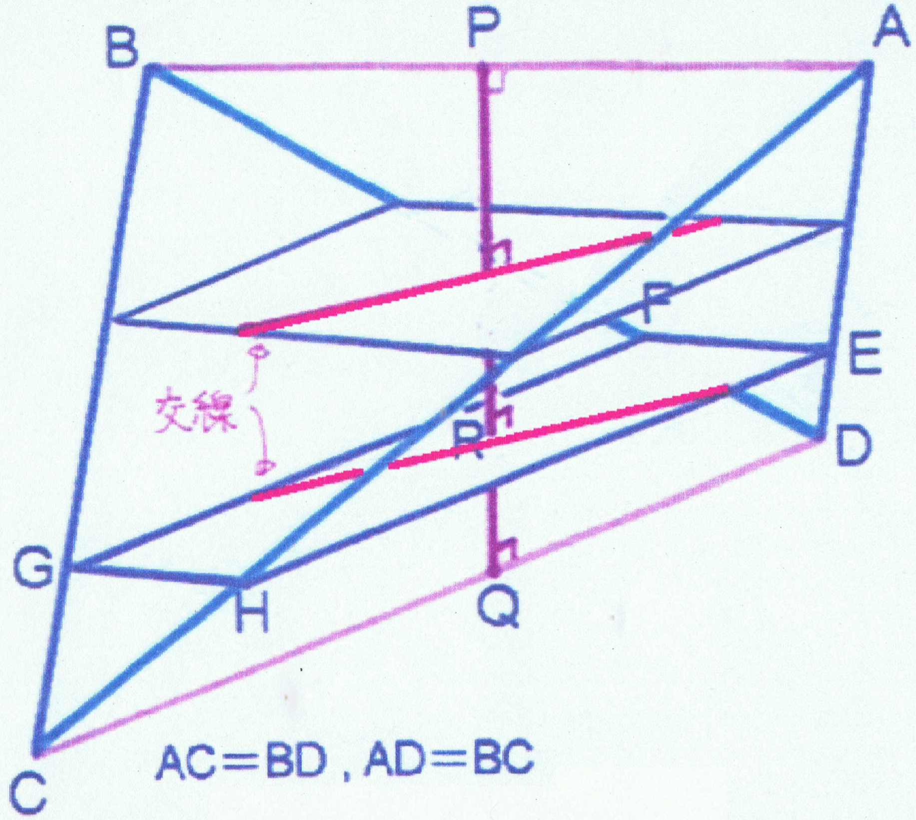

点Rは平行四辺形EFGHの中心であるから

線分PQを含む平面αと平行四辺形EFGHの交線をℓ

とすると、ℓはRを通るから

ℓすなわち平面αは

平行四辺形EFGHを２等分することがわかる。




したがって

線分PQ上(点P,Qを除く)の各点における

PQに垂直な平行四辺形と平面αとの交線

が各平行四辺形を ２等分するので

平面αは四面体ABCDを２等分する

といえる。

証明おわり