$\boxed{1}$　1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア)　$f_1(x) = \sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - x\right)$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

以下の問いに答えよ．

(1) $a = 2$，$b = 3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a = 1$，$b = 6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ．

（配点率 20 %）

(1)

$$f_5(0) \overset{(ウ)}{=} f_4(0) \overset{(イ)}{=} f_3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0\right) = f_3\left(\frac{5}{6}\right) \overset{(ウ)}{=} f_2\left(-\frac{5}{6}\right) \overset{(イ)}{=} f_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\right)$$

$$= f_1\left(\frac{10}{6}\right) = f_1\left(\frac{5}{3}\right) \overset{(ア)}{=} \sin\frac{5}{3}\pi = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2)

$$f_{2k}(0) \overset{(イ)}{=} f_{2k-1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{6}-0\right)$$

$$= f_{2k-1}\left(\frac{7}{6}\right) \overset{(ウ)}{=} f_{2k-2}\left(-\frac{7}{6}\right) \overset{(イ)}{=} f_{2k-3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{7}{6}\right) = f_{2k-3}\left(\frac{7}{6}+\frac{7}{6}\right)$$

$$= f_{2k-3}\left(\frac{7}{6}\times 2\right) = f_{2k-4}\left(-\frac{7}{6}\times 2\right) = f_{2k-5}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{7}{6}\times 2\right) = f_{2k-5}\left(\frac{7}{6}+\frac{7}{6}\times 2\right)$$

$$= f_{2k-5}\left(\frac{7}{6}\times 3\right)$$

$$= f_{2k-7}\left(\frac{7}{6}\times 4\right)$$

$$\vdots$$

$$= f_{2k-(2p-1)}\left(\frac{7}{6}\times p\right) \quad (p\text{は自然数})$$

$$\vdots$$

$$= f_1\left(\frac{7}{6}\times k\right)$$

$$\overset{(ア)}{=} \sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)$$

すると

$$\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0) = \sum_{k=1}^{100}(-1)^k \sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)$$

と表せる。

奇数 1, 3, 5, 7, …… は

$2p-1$ $(p=1, 2, 3, 4, \cdots)$

で表せるから、

$f_{2k-1}\left(\frac{7}{6}\times 1\right)$ $\quad 2k-(2\cdot 1-1)$

$f_{2k-3}\left(\frac{7}{6}\times 2\right)$ $\quad 2k-(2\cdot 2-1)$

$f_{2k-5}\left(\frac{7}{6}\times 3\right)$ $\quad 2k-(2\cdot 3-1)$

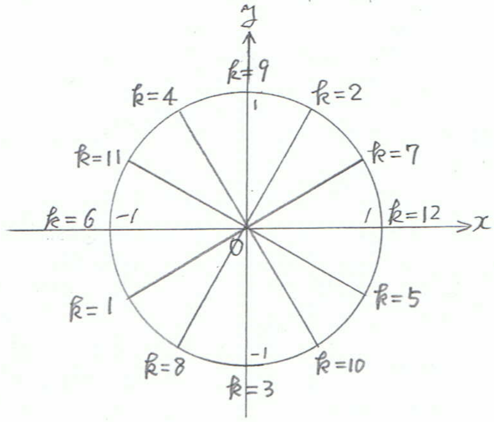
$f_{2k-7}\left(\frac{7}{6}\times 4\right)$ $\quad 2k-(2\cdot 4-1)$

$f_{2k-(2p-1)}\left(\frac{7}{6}\times p\right)$

$f_1\left(\frac{7}{6}\times k\right)$ $\quad 2k-(2k-1)$

ここで　$\sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)$ の k に自然数を順に代入してみると

右図のようになる。



そこで

k が 1 から 12 までのときの和を計算してみると

$$\sum_{k=1}^{12}(-1)^k\sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)$$

$$=(-1)^1\sin\frac{7}{6}\pi+(-1)^2\sin\frac{7\times2}{6}\pi+(-1)^3\sin\frac{7\times3}{6}\pi+(-1)^4\sin\frac{7\times4}{6}\pi+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{11}\sin\frac{7\times11}{6}\pi+(-1)^{12}\sin\frac{7\times12}{6}\pi$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+0$$

$$=0$$

つまり

$k=1\sim k=12$, $k=13\sim k=24$, $k=25\sim k=36$, $k=37\sim k=48$,

$k=49\sim k=60$, $k=61\sim k=72$, $k=73\sim k=84$, $k=85\sim k=96$ の

それぞれ12個分の和は全て 0 となることがわかる。

したがって

$$\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)=\sum_{k=1}^{100}(-1)^k\sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{96}(-1)^k\sin\left(\frac{7}{6}k\pi\right)+(-1)^{97}\sin\frac{7\times97}{6}\pi+(-1)^{98}\sin\frac{7\times98}{6}\pi+(-1)^{99}\sin\frac{7\times99}{6}\pi+(-1)^{100}\sin\frac{7\times100}{6}\pi$$

$$=0+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot(-1)+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$

(3)

$$f_6(0) \overset{(イ)}{=} f_5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \overset{(ウ)}{=} f_4\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \overset{(イ)}{=} f_3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$= f_3\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right) \overset{(ウ)}{=} f_2\left(-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}\right) \overset{(イ)}{=} f_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)$$

$$= f_1\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)$$

$$\overset{(ア)}{=} \sin\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)\pi$$

そこで

$\sin\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)\pi = 0$ となるのは 次の 8 通りである。

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=1$ つまり $\begin{cases} a=6 \\ b=6 \end{cases}$,

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=2$ つまり $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$, $\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}$

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=3$ つまり $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=4$ つまり $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=6$ つまり $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

したがって、求める確率は、

$$\frac{8}{6^2} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$