$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

(1)　まず、与えられた式をAとおいて、展開して整頓してみよう。

$$A=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}$$

$$=1+\frac{x+y+1}{xy}$$

$$=1+\frac{c+1}{xy}$$

この式をみると、分母xyが最大となるとき、Aが最小となることがわかる。

そこで、$x>0$，$y>0$ に相加平均と相乗平均の関係を使うと

$$\frac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}\quad（等号は\ x=y\ のとき成立）$$

$$\frac{c}{2}\geqq\sqrt{xy}$$

$c>0$より両辺とも正だから

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2\geqq\left(\sqrt{xy}\right)^2$$

$$\frac{c^2}{4}\geqq xy$$

つまり xyの最大値が$\frac{c^2}{4}$だとわかる。

このとき当然、$x+y=c$ より $x=y=\frac{c}{2}$ となっている。

すると

$$A=1+\frac{c+1}{xy}\geqq1+\frac{c+1}{\frac{c^2}{4}}=1+\frac{4(c+1)}{c^2}=\frac{c^2+4c+4}{c^2}=\left(\frac{c+2}{c}\right)^2$$

となって

Aは $x=y=\frac{c}{2}$ のとき 最小値 $\left(\frac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2) $B = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ とおく。

(1)の結果の最小値を使うのではないかと予想する!!

$x>0,\ y>0,\ z>0$ で、$x+y+z=1$ だから

$0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1$ であることがわかる。

すると $1-\frac{4}{3z}<0$ となっていることがわかるから

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)}_{\text{正}}\underbrace{\left(1-\frac{4}{3z}\right)}_{\text{負}}$$

Bが最大となるためには、

$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ はいつも正の値なので、最小値をとる必要がある。

Bの最大値は
0に最も近い負の値となる

(1)の結果より

$x=y$ のとき $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ は

最小値 $\left(\frac{c+2}{c}\right)^2=\left(1+\frac{2}{c}\right)^2=\left(1+\frac{2}{x+y}\right)^2$ をとるから

Bが最大となるのは

$B=\left(1+\frac{2}{x+y}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ のときである。

ここで $x+y=1-z$ だから

$f(z)=\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)$ とおいて、$0<z<1$ の範囲で、

最大値をさがしてみる。

$$f'(z)=2\left(1+\frac{2}{1-z}\right)\cdot\frac{-2\cdot(-1)}{(1-z)^2}\cdot\left(1-\frac{4}{3z}\right)+\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2\cdot\left(-\frac{-4\cdot 3}{(3z)^2}\right)$$

$$=2\cdot\frac{1-z+2}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\cdot\frac{12}{(3z)^2}$$

$$=\frac{4(3-z)(3z-4)}{3z(1-z)^3}+\frac{12(3-z)^2}{(3z)^2(1-z)^2}$$

$$=\frac{4\cdot 3z(3-z)(3z-4)+12(1-z)(3-z)^2}{(3z)^2(1-z)^3}$$

$$=\frac{12}{9}\cdot\frac{z(9z-12-3z^2+4z)+(1-z)(9-6z+z^2)}{z^2(1-z)^3}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{13z^2-12z-3z^3+9-6z+z^2-9z+6z^2-z^3}{z^2(1-z)^3}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{-4z^3+20z^2-27z+9}{z^2(1-z)^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{4z^3-20z^2+27z-9}{z^2(z-1)^3}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(z-3)(4z^2-8z+3)}{z^2(z-1)^3}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{(z-3)(2z-3)(2z-1)}{z^2(z-1)^3}$$

$f'(z)=0$ より $\quad \frac{4}{3} \cdot \frac{(z-3)(2z-3)(2z-1)}{z^2(z-1)^3}=0$

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{(z-3)(z-\frac{3}{2})(z-\frac{1}{2})}{z^2(z-1)^3}=0$$

$0<z<1$ だから $\quad z=\frac{1}{2}$

増減表をつくると

z	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(z)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(z)$	／	↗	最大	↘	／

$z=\frac{1}{2}$ のとき 最大値 $f(\frac{1}{2}) = \left(1+\frac{2}{1-\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-\frac{4}{\frac{3}{2}}\right)$

$$= (1+4)^2\left(1-\frac{8}{3}\right)$$

$$= 5^2 \times \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$= -\frac{125}{3}$$

したがって

$x=y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{2}$ のとき B は最大値 $-\frac{125}{3}$ をとる。