$\boxed{3}$　座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 (a, b) をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

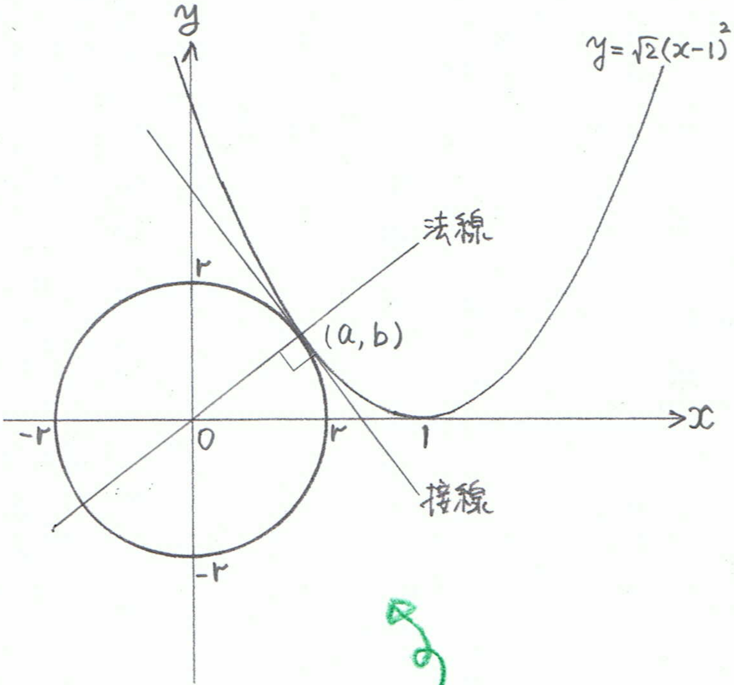
(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

（配点率 20 %）

(1)



円と放物線がただ1つの共有点をもつのは上図のように接しているときである。
そして、接点で法線を引くと、必ず円の中心を通る。

$$y=\sqrt{2}(x-1)^2$$

$$y'=2\sqrt{2}(x-1)\cdot 1=2\sqrt{2}(x-1)$$

点 $(a,\ b)$ における法線の方程式は

$$y-\sqrt{2}(a-1)^2=-\frac{1}{2\sqrt{2}(a-1)}(x-a)$$

この法線は原点を通るから

$$0-\sqrt{2}(a-1)^2=-\frac{1}{2\sqrt{2}(a-1)}(0-a)$$

$$\sqrt{2}(a-1)^2=\frac{-a}{2\sqrt{2}(a-1)}$$

$$4(a-1)^3=-a$$

$$4(a^3-3a^2+3a-1)=-a$$

$$4a^3-12a^2+12a-4+a=0$$

$$4a^3-12a^2+13a-4=0$$

この式を因数分解できるとしたら

$(4a\pm1)(a^2\cdots\cdots\mp4)$

$(2a\pm1)(2a^2\cdots\cdots\mp4)$

$(a\pm1)(4a^2\cdots\cdots\mp4)$

$(a\pm4)(4a^2\cdots\cdots\mp1)$

⋮

のような形になるから、

$\pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{2},\ \cdots\cdots$ を代入してみる。

$$(2a-1)(2a^2-5a+4)=0$$

$$2a-1=0,\quad 2a^2-5a+4=0$$

$2a-1=0$ より $a=\frac{1}{2}$

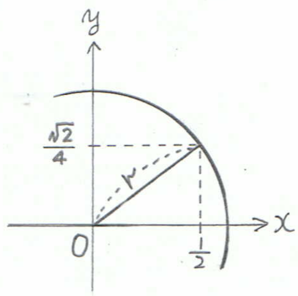
$2a^2-5a+4=0$ より

$$a=\frac{5\pm\sqrt{25-32}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{7}i}{2}$$

よって $a=\frac{1}{2}$

このとき

$$b=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{4}$$



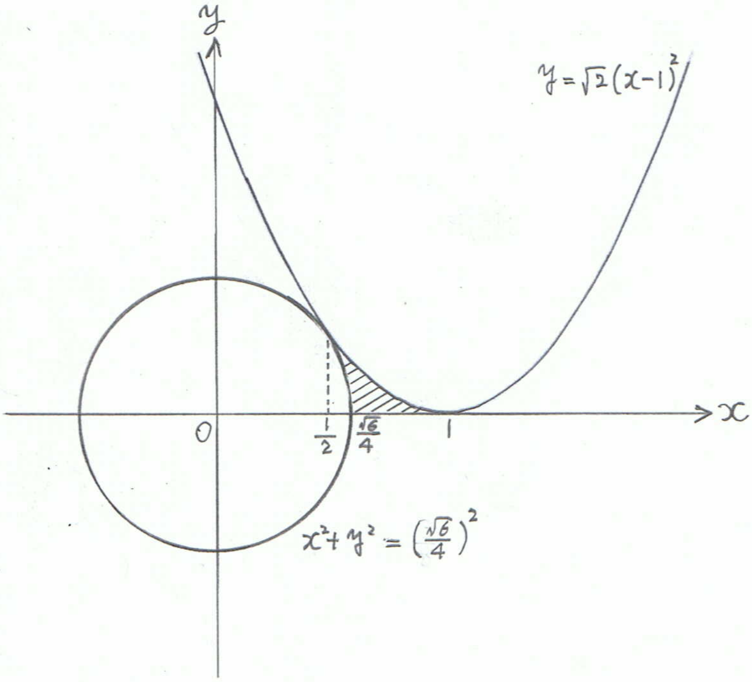
また

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{16}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}$$



(2)

連立方程式をみたす領域は左図の斜線部であるから、これをx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めればよい。

まず円の方程式 $x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$ を変形しておく。

$$y^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-x^2=\frac{3}{8}-x^2$$

$$\therefore\ y=\pm\sqrt{\frac{3}{8}-x^2}$$

回転体の体積Vは

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\sqrt{2}(x-1)^2\right\}^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\sqrt{\frac{3}{8}-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}2(x-1)^4dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\frac{3}{8}-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$=2\pi\left\{-\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right\}-\pi\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3-\left\{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\right)$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\pi\left(\frac{3\sqrt{6}}{32}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{6}}{64}-\frac{3}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{80}\pi-\pi\left(\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{6}}{32}-\frac{3}{16}+\frac{1}{24}\right)$$

$$=\frac{1}{80}\pi-\pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{32}-\frac{9}{48}+\frac{2}{48}\right)$$

$$=\frac{1}{80}\pi-\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{16}-\frac{7}{48}\right)$$

$$=\frac{3-15\sqrt{6}+35}{240}\pi$$

$$=\frac{38-15\sqrt{6}}{240}\pi$$