4　正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n = 2 + \dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n, m) をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20} S_{20} = a + b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

（配点率 20 %）

(1)

$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするから

$N \leqq \log_2 n < N+1$

変形していくと

$N\times 1 \leqq \log_2 n < (N+1)\times 1$

$N\log_2 2 \leqq \log_2 n < (N+1)\log_2 2$

$\log_2 2^N \leqq \log_2 n < \log_2 2^{N+1}$

底 > 1 だから

$2^N \leqq n < 2^{N+1}$ ------①

①より $2^N \leqq n$ だから

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 2^N A_n\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^N}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{2^N A_n}{1}+\frac{2^N A_n}{2}+\frac{2^N A_n}{3}+\cdots+\frac{2^N A_n}{2^N}+\cdots+\frac{2^N A_n}{n}$$

ここで $A_n = 1\times 3\times 5\times\cdots\times$($n$以下の最大奇数)だから、上式の各項の偶奇を調べてみる。

(ア) 分母 k が 2^N のとき

$$\frac{2^N A_n}{2^N} = A_n = 1\times 3\times 5\times\cdots\times(n\text{以下の最大奇数}) = (\text{奇数})$$

(イ) 分母 k が奇数のとき

$$\frac{2^N A_n}{k} = \frac{2^N\left(1\times 3\times 5\times\cdots\times(k-2)\times k\times(k+2)\times\cdots\times(n\text{以下の最大奇数})\right)}{k}$$

$$= 2^N\left(1\times 3\times 5\times\cdots\times(k-2)\times(k+2)\times\cdots\times(n\text{以下の最大奇数})\right) = (\text{偶数})$$

(ウ) 分母 k が偶数のとき($k=2^N$ は省く)

$k = 2^l\times Q$ (l は自然数で $1\leqq l\leqq N-1$, Q は n 以下の奇数)とおけるので

$k=2^N$ は省くから $l\neq N$,
そして $k\leqq n$ だから①より $l<N+1$
そこで $l\leqq N-1$ となる。

Q が n より大きい奇数だったら
k は n より大きくなってしまう。

$$\frac{2^N A_n}{k} = \frac{2^N\left(1\times 3\times 5\times\cdots\times(Q-2)\times Q\times(Q+2)\times\cdots\times(n\text{以下の最大奇数})\right)}{2^l\times Q}$$

$$= 2^{N-l}\left(1\times 3\times 5\times\cdots\times(Q-2)\times(Q+2)\times\cdots\times(n\text{以下の最大奇数})\right) = (\text{偶数})$$

例
$k=2=2^1\times 1$
$k=4=2^2\times 1$
$k=6=2^1\times 3$
$k=8=2^3\times 1$
$k=10=2^1\times 5$
$k=12=2^2\times 3$
⋮

したがって、(ア),(イ),(ウ)より

$2^N A_n S_n$ は、1項の奇数と $n-1$ 項の偶数の和となっているので、この和は奇数であるといえる。

(2)

$S_n = 2 + \frac{m}{20}$ のとき

$2^N A_n S_n = 2^N A_n\left(2+\frac{m}{20}\right) = 2^N A_n \times \frac{40+m}{20} = 2^N A_n \times \frac{40+m}{2^2\times 5}$

ここで (1)の結果より $2^N A_n S_n$ は奇数となるので $2^N A_n \times \frac{40+m}{2^2\times 5}$ も奇数となる。

$N \geqq 3$ のとき ①より $2^3 \leqq n$ だから

$$2^N A_n S_n = 2^N A_n \times \frac{40+m}{2^2\times 5} = 2^{N-2}\cdot\frac{A_n(40+m)}{5} = 2^{N-2}\cdot\frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots)(40+m)}{5}$$

$= 2^{N-2}\cdot(1\cdot 3\cdot 7\cdot \cdots)(40+m)$ は偶数となってしまうので $N<3$ つまり $N=1, 2$

①より $N=1$ のとき　$2^1 \leqq n < 2^2$ から　$n = 2, 3$

$N=2$ のとき　$2^2 \leqq n < 2^3$ から　$n = 4, 5, 6, 7$

そこで、S_nの値を計算してみると

$S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$S_3 = S_2 + \frac{1}{3} = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 1 + \frac{5}{6}$

$S_4 = S_3 + \frac{1}{4} = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}$

$S_5 = S_4 + \frac{1}{5} = \frac{25}{12} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} = 2 + \frac{17}{60}$

$S_6 = S_5 + \frac{1}{6} = \frac{137}{60} + \frac{1}{6} = \frac{147}{60} = 2 + \frac{27}{60} = 2 + \frac{9}{20}$

$S_7 = S_6 + \frac{1}{7} = \frac{147}{60} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420} = 2 + \frac{249}{420} = 2 + \frac{83}{140}$

したがって　求める正の整数の組は

$(n, m) = (6, 9)$

(3)

$S_{20}=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k}$ を、分母が奇数の組と偶数の組にどんどん分解してみよう。

$$S_{20}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}$$

$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{15}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{15}+\frac{3}{16}$$

すると

$$A_{20}S_{20}=A_{20}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2}A_{20}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{23}{15}\cdot A_{20}+\frac{3}{16}\cdot A_{20}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{A_{20}}{2k-1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{A_{20}}{2k-1}+\frac{23\cdot A_{20}}{4\cdot 15}+\frac{3\cdot A_{20}}{16}$$

そこで各項をみていくと

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{A_{20}}{2k-1}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{1}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{19}=(\text{整数})$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{A_{20}}{2k-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{1}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{3}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot19}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(5\text{個の奇数の和})=\frac{1}{2}(\text{奇数})=(\text{整数})+\frac{1}{2}$$

$$\frac{23\cdot A_{20}}{4\cdot15}=\frac{23\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19}{4}$$

ここで、分子で4を法とした合同式を作ってみると

$$23\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\equiv3\cdot3\cdot1\cdot3\cdot1\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1\cdot3\equiv9\cdot9\cdot3\equiv1\cdot1\cdot3\equiv3$$

よって $\dfrac{23\cdot A_{20}}{4\cdot15}=(\text{整数})+\dfrac{3}{4}$

$$\frac{3\cdot A_{20}}{16}=\frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19}{16}$$

ここで、分子で16を法とした合同式を作ってみると

$$3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19$$

$$\equiv 45\cdot 63\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3\equiv(-3)\cdot(-1)\cdot 15\cdot(-3)\equiv 3\cdot(-1)\cdot(-3)\equiv 9$$

よって $\dfrac{3\cdot A_{20}}{16}=(\text{整数})+\dfrac{9}{16}$

したがって

$$A_{20}S_{20}=(\text{整数})+(\text{整数})+\frac{1}{2}+(\text{整数})+\frac{3}{4}+(\text{整数})+\frac{9}{16}$$

$$=(\text{整数})+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}$$

$$=(\text{整数})+\frac{29}{16}$$

$$=(\text{整数})+1+\frac{13}{16}$$

$$=(\text{整数})+\frac{13}{16}$$

ゆえに $b=\dfrac{13}{16}$