$\boxed{5}$ 円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y-x)$ がなりたつことを示せ．

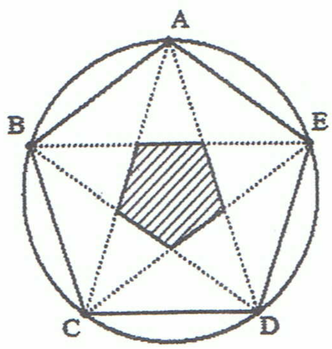
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

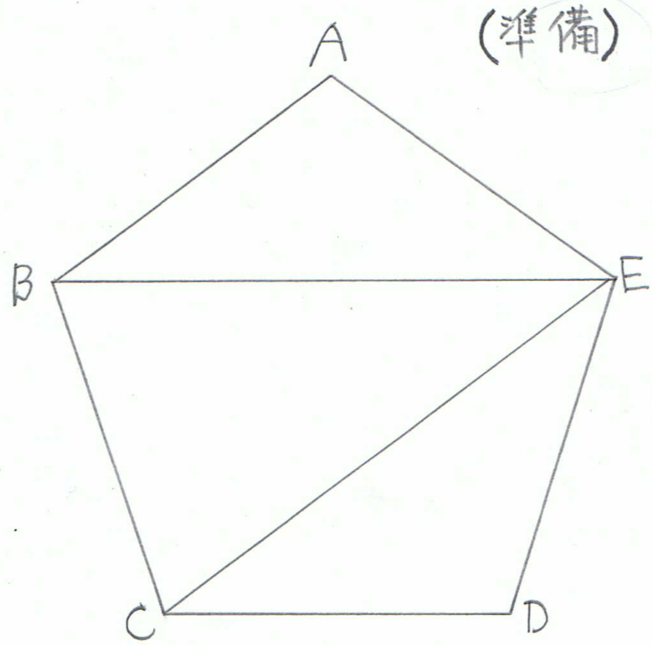
を求めよ．



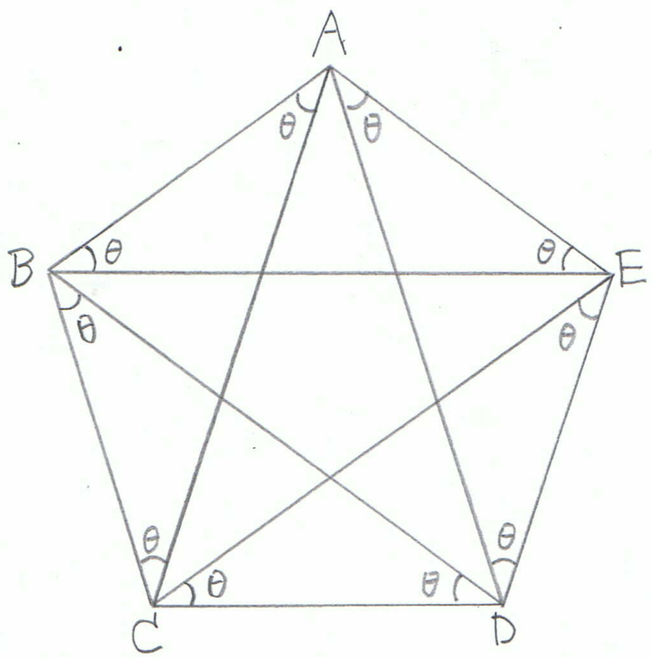
斜線部分が R_2

（配点率 20 %）

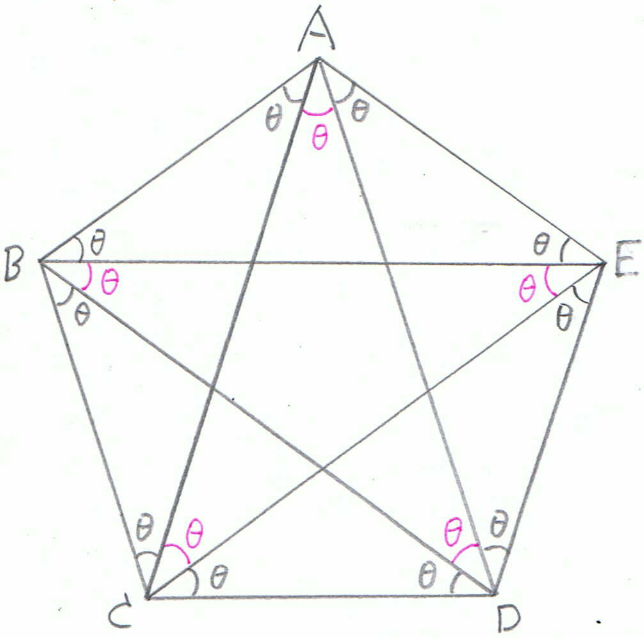
(準備) 正五角形の角の大きさ



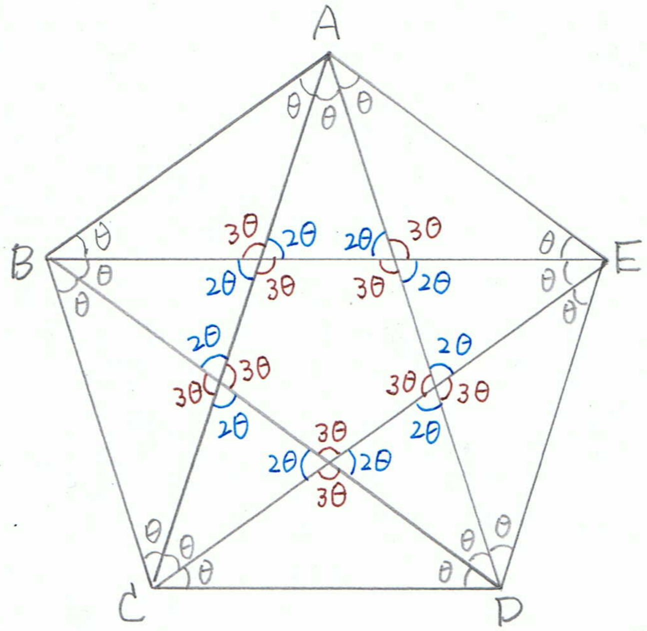
正五角形は図のように3個の三角形に分割できるから、正五角形の内角の和は $180^\circ \times 3 = 540^\circ$ となる。
すると正五角形の一つの内角は
$540^\circ \div 5 = \underline{108^\circ}$ となる。



△ABE, △BCA, △CDB, △DEC, △EAD の5個の二等辺三角形は合同だから底角は全て等しい。
底角の大きさは、△ABEで考えてみると
$\angle ABE = \angle AEB = (180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$
となる。これを θ とおいてみる。



正五角形の一つの内角は 108° だから
$108^\circ - 2\theta = 108^\circ - 2 \times 36^\circ = 36^\circ = \theta$
となるから図のようになる。



三角形の内角と外角の関係から 2θ,

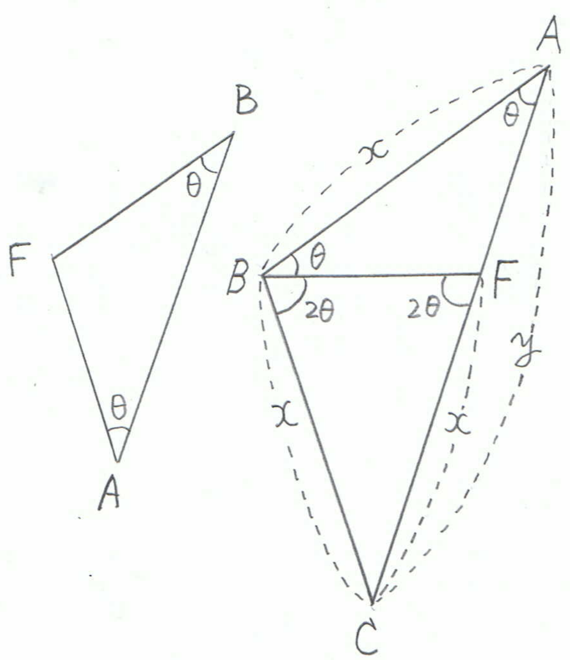
また、$180^\circ - 2\theta = 180^\circ - 2 \times 36^\circ = 108^\circ$

$= 3 \times 36^\circ = 3\theta$

が出てくる。

(1) AC と BE の交点を F としておく。

まず，辺の長さを確認していこう。



$\triangle BAC$ は $BA = BC$ の二等辺三角形，

$\triangle BCF$ は $BC = FC$ の二等辺三角形だから

$BA = BC = FC = x$ となる。

すると $AF = AC - FC = y - x$ となる。

次に相似を利用して辺の長さの関係を作ってみよう。

$\triangle BAC$ と $\triangle FBA$ において

$\angle BAC = \angle FBA$

$\angle BCA = \angle FAB$

により，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle BAC \backsim \triangle FBA$

である。

そこで

$AC : BA = BC : FA$ となるから

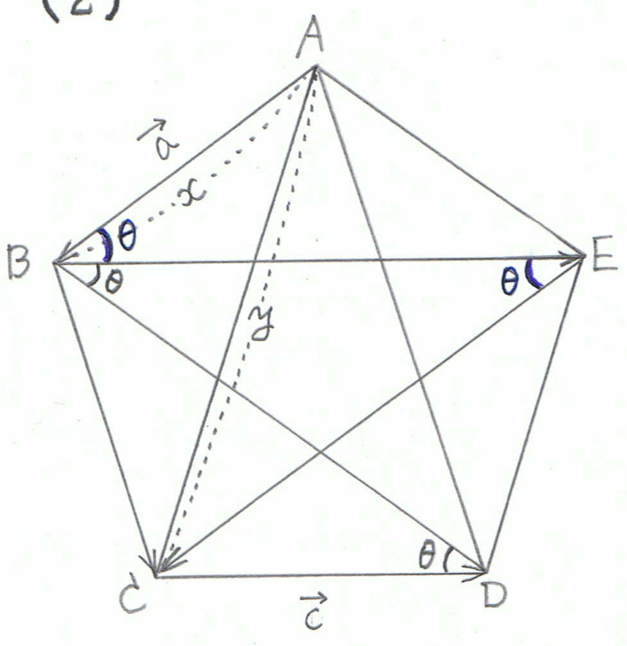
$y : x = x : (y - x)$

したがって

$x^2 = y(y - x)$

となる。

(2)



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$ で考えていこう。

$\angle EBD = \angle CDB$（錯角）だから $BE \parallel CD$,

また、$BE = y$, $CD = x$ より

$$\overrightarrow{BE} = \frac{y}{x}\overrightarrow{CD} = \frac{y}{x}\vec{c}$$

$\angle ABE = \angle CEB$（錯角）だから $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EC}$

また、$AB = x$, $EC = y$ より

$$\overrightarrow{EC} = \frac{y}{x}\overrightarrow{AB} = \frac{y}{x}\vec{a}$$

すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} \\ &= \frac{y}{x}\vec{c} + \frac{y}{x}\vec{a} \\ &= \frac{y}{x}(\vec{a} + \vec{c}) \quad \text{------ ①}\end{aligned}$$

ここで (1) から　$x^2 = y(y - x)$ より

$$y^2 - xy - x^2 = 0$$

$x^2 > 0$ だから両辺を x^2 で割ると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

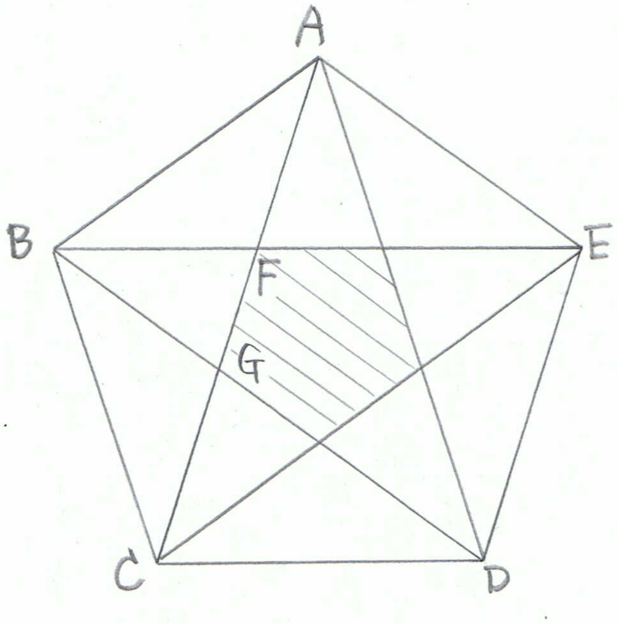
$x > 0$, $y > 0$ より $\frac{y}{x} > 0$ だから

$$\frac{y}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{------ ②}$$

したがって ② を ① に代入して

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

(3)



ACとBE, BDの交点をそれぞれF, Gとおく。

$BC = FC = x$, $AC = y$ だから

$$AF = AC - FC = y - x$$

また、$AB = AG = x$ だから

$$FG = AG - AF$$
$$= x - (y - x)$$
$$= 2x - y \quad \text{----} ③$$

ここで (2) の ② より

$$\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

これを ③ に代入して

$$FG = 2x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$
$$= \frac{4-(1+\sqrt{5})}{2}x$$
$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

したがって R_2 の一辺の長さは $\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$ となる。

(4)　R_n と R_{n+1} は相似であることは明らか。

そこで、(3) の結果より

R_1 と R_2 の相似比は $x : \frac{3-\sqrt{5}}{2}x = 1 : \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

だから　R_n と R_{n+1} の相似比も当然、同様になる。

すると　R_n と R_{n+1} の面積比は

$$1^2 : \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 : \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = 1 : \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

となるから

$$S_{n+1} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} S_n$$

と表せる。

これは　公比 $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ の等比数列となっているから

$$S_n = S_1 \times \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

と表せる。

そこで

$$\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k = \frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^2(-1)^{k-1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}S_1\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

すると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$ となり、

これは　初項 1，公比 $-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ の無限等比級数であり

$-1 < -\frac{7-3\sqrt{5}}{2} < 1$ だから　この級数は収束し、

その和は　$\dfrac{1}{1+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{2+7-3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{9-3\sqrt{5}} = \dfrac{2(9+3\sqrt{5})}{81-45}$

$$= \frac{6(3+\sqrt{5})}{36} = \frac{3+\sqrt{5}}{6}$$