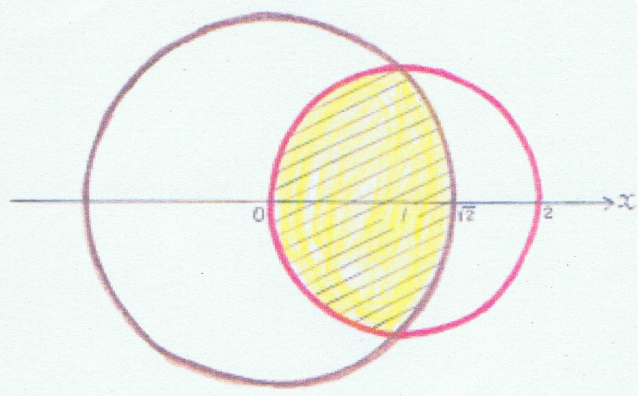
$\boxed{5}$ xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに1回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が1以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0,t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

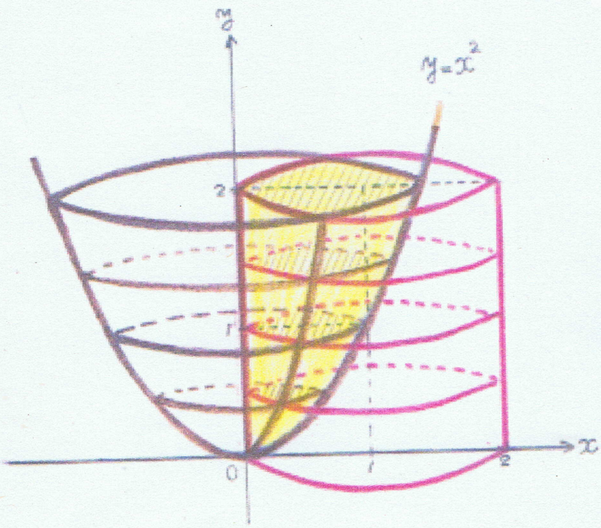
(2) M の体積 V を求めよ．

（配点率 20 ％）

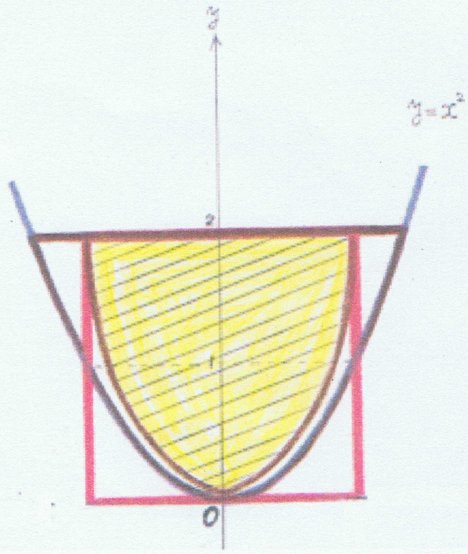
立体L, Mを図示すると、下図のようになる。



上から見た

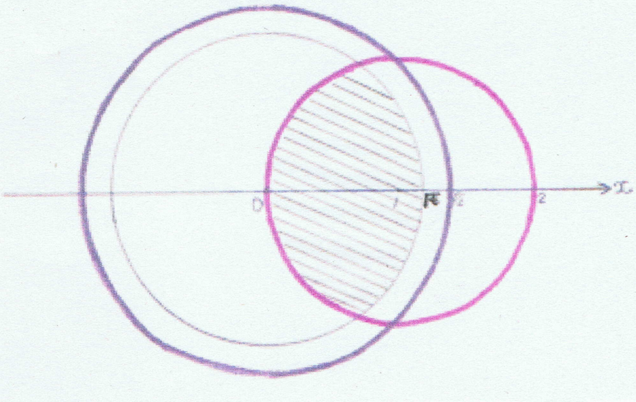


横から見た

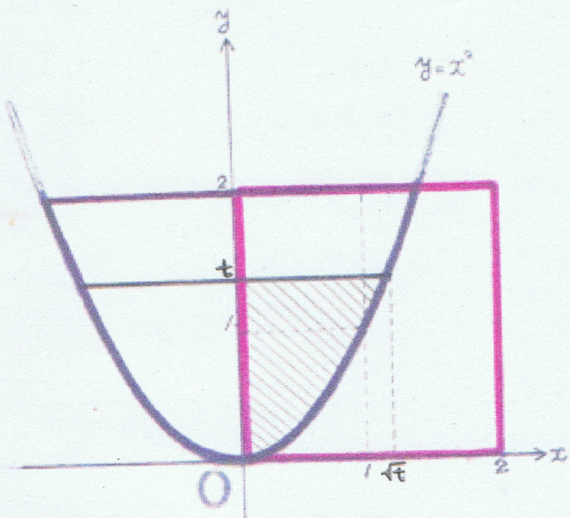


黄色部で表される立体がMである。

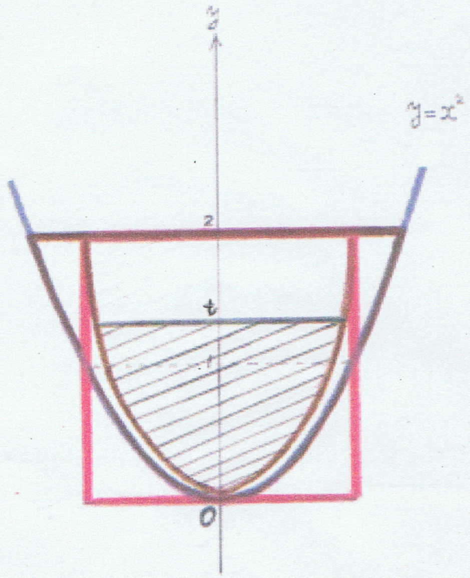
(1) この立体Mを点$(0,t)$で切ると下図の斜線部のようになる。



↓ 上から見た



← 横から見た



これから切り口の面積$S(t)$を求めていく。

$S(t)$をθで表す必要があるから、

θが図のどの部分の角になるかを調べる。

$t=(2\cos\theta)^2$

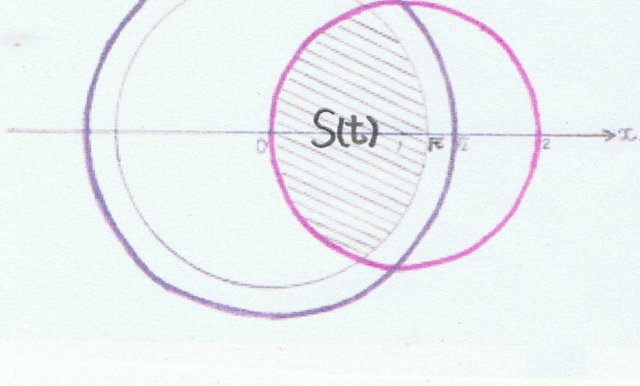
ここで $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ だから

$0\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるので

$2\cos\theta\geqq0$ より

よって $\sqrt{t}=2\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{t}}{2}$



ここで 下図のように 点A, B, C, P, P′を定める。

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$ を図の中でさがす。

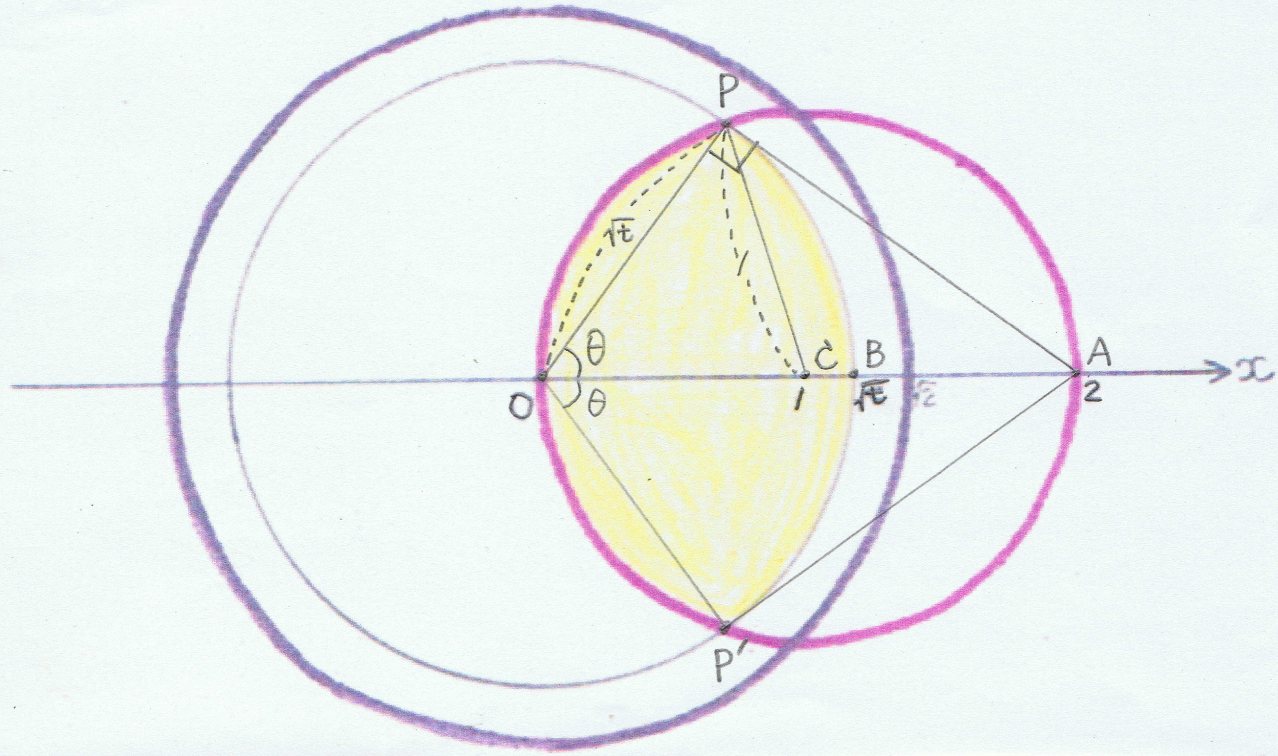
△OPAに着目すると、

OPは円の半径だから $OP=\sqrt{t}$ である。

∠OPAは直径OAに対する円周角だから ∠OPA=∠R となるので△OPAは直角三角形だから $OA=2$, $OP=\sqrt{t}$ より

$\cos\theta = \dfrac{OP}{OA}$ となるから $\angle AOP=\theta$ である。

x軸に関する対称性より $\angle AOP'=\theta$ となることもわかる。



求める面積 $S(t) = 2\times\{扇形OPB + (扇形CPO - \triangle CPO)\}$

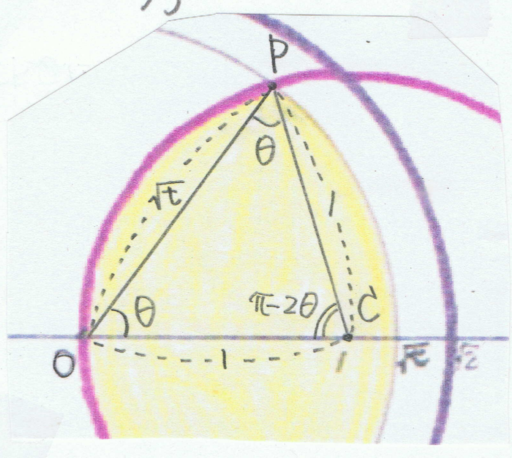
$= 2\times\left\{\pi\times(\sqrt{t})^2\times\dfrac{\theta}{2\pi} + \left(\pi\times1^2\times\dfrac{\pi-2\theta}{2\pi} - \dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{t}\sin\theta\right)\right\}$

$= 2\times\left\{\dfrac{t\theta}{2} + \left(\dfrac{\pi-2\theta}{2} - \dfrac{\sqrt{t}\sin\theta}{2}\right)\right\}$

$= t\theta + \pi - 2\theta - \sqrt{t}\sin\theta$

$= (t-2)\theta - \sqrt{t}\sin\theta + \pi$

ここで $t=(2\cos\theta)^2$, $\sqrt{t}=2\cos\theta$ だから



$$S(t) = (t-2)\theta - \sqrt{t}\sin\theta + \pi$$
$$= \{(2\cos\theta)^2 - 2\}\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \pi$$
$$= (4\cos^2\theta - 2)\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \pi$$
$$= 2(2\cos^2\theta - 1)\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \pi$$
$$= 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi$$

2倍角の公式

(2) 求める体積 $V = \int_0^2 S(t)\,dt$

ここで

$$t = (2\cos\theta)^2$$
$$t = 4\cos^2\theta$$
$$\frac{dt}{d\theta} = 4 \times 2\cos\theta \times (-\sin\theta)$$
$$= -8\sin\theta\cos\theta$$

また

t	$0 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$t = (2\cos\theta)^2$　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より

$0 = (2\cos\theta)^2$	$2 = (2\cos\theta)^2$
$2\cos\theta = 0$	$2\cos\theta = \sqrt{2}$
$\cos\theta = 0$	$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{2}$	$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$

t	$0 \longrightarrow 2$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

なので

$$V = \int_0^2 S(t)\,dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)(-8\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$= -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta\cos\theta(2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)\,d\theta$$
$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta(2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)\,d\theta$$
$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin 2\theta\cos 2\theta - \sin^2 2\theta + \pi\sin 2\theta)\,d\theta$$
$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta\sin 4\theta - \frac{1-\cos 4\theta}{2} + \pi\sin 2\theta\right)d\theta$$
$$= 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\theta\sin 4\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta + \pi\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)d\theta$$

2倍角の公式
$2\sin A\cos A = \sin 2A$

半角の公式
$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$

$$= 4\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin 4\theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 4\theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin 2\theta \, d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \, d\theta \right)$$

ここで

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{f}{\theta} \underset{g'}{\sin 4\theta} \, d\theta = \left[\underset{f}{\theta} \underset{g}{\left(-\frac{1}{4}\cos 4\theta\right)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\left(-\frac{1}{4}\cos 4\theta\right)} d\theta$$ ← 部分積分法

$$= \left[-\frac{1}{4}\theta \cos 4\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos 4\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cos 2\pi - \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cos \pi \right) + \left[\frac{1}{16} \sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} + \frac{1}{16} \sin 2\pi - \frac{1}{16} \sin \pi$$

$$= \frac{-2\pi - \pi}{16} = -\frac{3}{16}\pi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 4\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8} \sin 2\pi - \frac{1}{8} \sin \pi = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \sin 2\theta \, d\theta = \left[-\frac{\pi}{2} \cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cos \pi - \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \, d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi - \pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

したがって

$$V = 4\left(-\frac{3}{16}\pi + 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= -\frac{3}{4}\pi + 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{-3\pi + 8\pi - 2\pi}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\pi$$