1 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log(1 + \frac{x}{n}) \qquad (x \geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

（配点率 20 %）

(1)

$$I_n=\int_0^n f_n(x)\,dx$$
$$=\int_0^n \frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$$

$\int_0^1 \log(1+x)\,dx$ の形をつくるために
$\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ の $\frac{x}{n}$ を t とおいて
置換積分にかえてみる。

ここで $\frac{x}{n}=t$ とおくと　$x=nt$，$\frac{dx}{dt}=n$，

x	$0 \to n$
t	$0 \to 1$

$$I_n=\int_0^1 \frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot n\,dt$$
$$=\int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt$$

ここで　自然数 $n>0$，$0\leqq t\leqq 1$ だから

$nt\geqq 0$，$1+nt>0$，$nt<1+nt$ より $0\leqq \frac{nt}{1+nt}<1$

また、$\log(1+t)\geqq 0$

すると　区間 $[0,1]$ では　$\frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\leqq \log(1+t)$ となるので

$$\int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)\,dt \leqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt$$

定積分の性質

区間 $[a,b]$ で $f(x)\leqq g(x)$

ならば

$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$

すなわち　$I_n\leqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt$

$$\therefore\ \int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

$\int_0^1 \log(1+t)\,dt=\int_0^1 \log(1+x)\,dx$

変数を変えても
定積分の値は同じになる。

(2)

考え方

(1) より $\int_0^n f_n(x)dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)dx$ だから

$\boxed{} \leqq \int_0^n f_n(x)dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)dx$

これをさがして、はさみうちの原理が使えるのではないか、と考える。

まずはじめに $\int_0^1 \log(1+x)dx$ の値を求めておく。

$$\int_0^1 \log(1+x)dx = \int_0^1 1\cdot\log(1+x)dx$$

部分積分法

$$= \Big[x\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$= 1\log 2 - 0 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$$

$$= \log 2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \log 2 - \Big[x-\log(x+1)\Big]_0^1$$

$$= \log 2 - (1-\log 2 - 0) = 2\log 2 - 1$$

そこで (1) より $I_n \leqq 2\log 2 - 1$ となる。

次に $\boxed{}$ をさがしていく。

$I_n = \int_0^n f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)dt$ だったので、これより小さいものをさがす。

$$\int_0^1 \frac{nt}{1+nt}\log(1+t)dt = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)dt$$

$$= \int_0^1 \log(1+t)dt - \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt$$

ここで $0 \leqq t \leqq 1$ のとき $0 \leqq \log(1+t) \leqq \log 2$ だから

$\int_0^1 \log(1+t)dt \leqq \int_0^1 \log 2\,dt$ となり、

(1)の定積分の性質と同じ

また $0 < \frac{1}{1+nt} < 1$ だから

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt}_{小} \leqq \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt}_{大}$$

すると

$$\int_0^1 \log(1+t)\,dt - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt}_{小} \geqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt}_{大}$$

よって

$$I_n \geqq \int_0^1 \log(1+t)\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt$$

$\boxed{}$ の中味が見つかった。

ここで $\int_0^1 \log(1+t)\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\log 2\,dt$

$$= 2\log 2 - 1 - \log 2 \int_0^1 \frac{1}{1+nt}\,dt$$

$$= 2\log 2 - 1 - \log 2 \left[\frac{1}{n}\log(1+nt)\right]_0^1$$

$$= 2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \left(\frac{1}{n}\log(1+n) - \frac{1}{n}\log 1\right)$$

$$= 2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \frac{\log(1+n)}{n}$$

したがって

$$2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \frac{\log(1+n)}{n} \leqq I_n \leqq 2\log 2 - 1$$

そして $\lim_{n\to\infty}\left\{2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \frac{\log(1+n)}{n}\right\}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \frac{\log(1+n)}{1+n} \cdot \frac{1+n}{n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot \frac{\log(1+n)}{1+n} \cdot \left(\frac{1}{n}+1\right)\right\}$$

$$= 2\log 2 - 1 - \log 2 \cdot 0 \cdot 1$$

$$= 2\log 2 - 1$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$

同じ式であり、
しかも
正の無限大に発散する。

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{1+n} = 0$

同じ式
しかも
$n\to\infty$ のとき
$1+n$ は
正の無限大に発散する。

ゆえに はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 2\log 2 - 1$$