1 (60 点)

数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．また数列$\{b_n\}$を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定める．

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(2) すべてのnに対して，不等式$b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ．

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$を求めよ．

(1) $a_1=5,\quad a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ より

$$a_2=\frac{4a_1-9}{a_1-2}=\frac{4\times5-9}{5-2}=\frac{11}{3}$$

$$a_3=\frac{4a_2-9}{a_2-2}=\frac{4\times\frac{11}{3}-9}{\frac{11}{3}-2}=\frac{17}{5}$$

$$a_4=\frac{4a_3-9}{a_3-2}=\frac{4\times\frac{17}{5}-9}{\frac{17}{5}-2}=\frac{23}{7}$$

これから 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は

$$a_n=\frac{5+6(n-1)}{1+2(n-1)}=\frac{6n-1}{2n-1}\quad\text{----①}$$

であると推測できる。

この推測が正しいことを数学的帰納法で証明する。

[I] $n=1$ のとき $a_1=\dfrac{6\times1-1}{2\times1-1}=\dfrac{5}{1}=5$ となって成り立つ。

[II] $n=k$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{6k-1}{2k-1}\quad\text{--------②}$$

これより $n=k+1$ のとき $a_{k+1}=\dfrac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}=\dfrac{6k+5}{2k+1}$ となることを証明する。

$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ だから

$$a_{k+1}=\frac{4a_k-9}{a_k-2}\underset{②代入}{=}\frac{4\times\frac{6k-1}{2k-1}-9}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=\frac{\frac{4(6k-1)-9(2k-1)}{2k-1}}{\frac{6k-1-2(2k-1)}{2k-1}}=\frac{24k-4-18k+9}{6k-1-4k+2}$$

$$=\frac{6k+5}{2k+1}$$

よって $n=k+1$ のときも ① は成り立つ.

[I], [II] から 全ての自然数 n について ① は成り立つ.

したがって 求める一般項は

$$a_n=\frac{6n-1}{2n-1}$$

である。

(2) $$b_n=\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+3+\cdots+n}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n}ka_k}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

数列の和の公式が使えないときは、とりあえずΣを使って書いてみる。

そして

Σの性質を使ってみる。

㋐ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

㋑ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{6k-1}{2k-1}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ここで　分子 $=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{6k-1}{2k-1}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{6k^2-k}{2k-1}$$

Σの性質を使うために、たし算に変える。

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 3k+1 \\ 2k-1\,\big) & 6k^2-k \\ & 6k^2-3k \\ \hline & 2k \\ & 2k-1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(3k+1+\frac{1}{2k-1}\right)$$

Σの性質を使う

$$=\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{個}}=n$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$

数列の和の公式が使えるものがでてきた。

$$=3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

そこで

$$b_n=\frac{3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}\left\{3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right\}$$

$$=3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$$

$3+\frac{4}{n+1}$ に似ている!!

$$3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}}$$

ここがnになれば完全に一致!!

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

$$\leqq$$

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{個}}=n$$

ここで　kが自然数のとき $\frac{1}{2k-1}\leqq 1$ だから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\leqq\sum_{k=1}^{n}1$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\leqq n$$

よって

$$b_n\leqq 3+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}\times n$$

$$\therefore\ b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}$$

(3) $b_n = 3 + \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{2}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$ において

$\dfrac{2}{n+1} > 0$, $\dfrac{2}{n(n+1)} > 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1} > 0$ だから

$b_n > 3$ となる。

そして (2) より $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ だから

$$3 < b_n \leqq 3 + \frac{4}{n+1}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{4}{n+1}\right) = 3$ だから

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3 \quad \text{となる。}$$