2 (60 点)

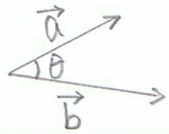
四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = x$ とする．頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H′ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す．このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ．また，x が変化するときの V の最大値を求めよ．

【ここで使うベクトルの確認】

ベクトルの内積　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$

ベクトルの垂直条件　$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

内積の計算法則

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$　交換法則

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$　分配法則

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$　分配法則

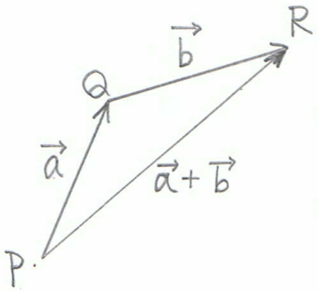
$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　実数倍の結合法則

ベクトルの長さ（大きさ）と内積

$$\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{\text{自分と自分の内積}} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = \underbrace{|\vec{a}|^2}_{\text{自分の長さの2乗}}$$

自分と自分の内積 ＝（イコール） 自分の長さの2乗

★ ベクトルの長さ（大きさ）が欲しければ 自分と自分の内積を作る!!

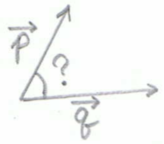


$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$

$|\overrightarrow{QR}|^2 = |\vec{b}|^2 = \vec{b}\cdot\vec{b}$

$|\overrightarrow{PR}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

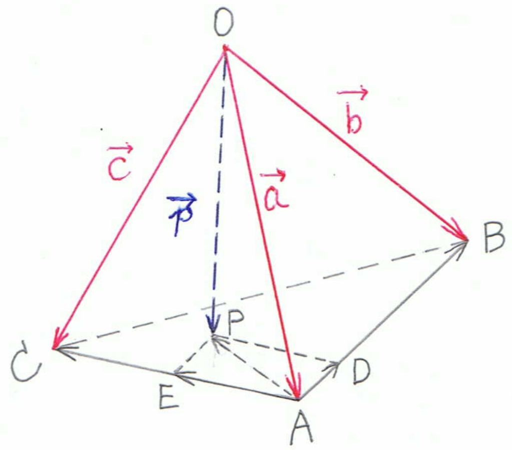
☆ 例えば $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が不明のとき、$\vec{p}\cdot\vec{q}$ を求めたい場合は、



$|\vec{p}+\vec{q}|^2$ または $|\vec{p}-\vec{q}|^2$ を作ってみると、うまくいくことがある!!

$$\underbrace{|\vec{p}\pm\vec{q}|^2}_{\text{自分の長さの2乗}} = \underbrace{(\vec{p}\pm\vec{q})\cdot(\vec{p}\pm\vec{q})}_{\text{自分と自分の内積}} = \vec{p}\cdot\vec{p} \pm 2\underbrace{\vec{p}\cdot\vec{q}}_{\text{出た!!}} + \vec{q}\cdot\vec{q}$$

3本のベクトルを使って、その平面上の点のベクトルを表す



平面ABC上の任意の点をPとする。

PD // CA
PE // BA
とする。

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

ここで $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AC}$ と表せるので

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

すると

$$\vec{p} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$$

整頓していくと

$$\vec{p} - \vec{a} = s\vec{b} - s\vec{a} + t\vec{c} - t\vec{a}$$

$$\vec{p} = \vec{a} - s\vec{a} - t\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

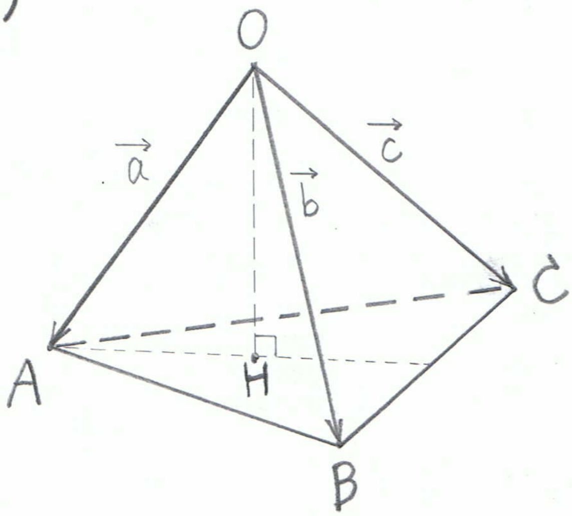
$$\therefore \ \vec{p} = (1 - s - t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

ここで $1 - s - t = r$ とおくと

$\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ しかも $r + s + t = 1$ となる。

$(1 - s - t) + s + t = 1$

(1)



まずはじめに $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の内積を求めておく。必ず使うはずだから!!

㋐ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は△OABに着目。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が不明なので辺ABの長さを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表す方法利用。

$$\underbrace{|\overrightarrow{AB}|^2}_{\text{自分の長さの2乗}}=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\underbrace{(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})}_{\text{自分と自分の内積}}$$

だから

$$x^2=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}$$

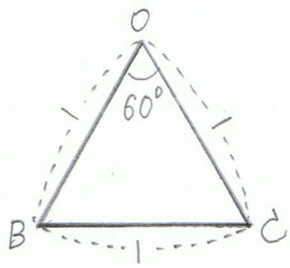
自分と自分の内積＝自分の長さの2乗 $\left\{\begin{array}{l}\text{ここで } \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=1^2=1\\ \vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2=1^2=1\\ \vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2=1^2=1\end{array}\right.$

したがって

$$x^2=1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{2-x^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}$$

㋑ $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積は△OBCに着目。



△OBCは正三角形だから

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は60°

だから

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

㋒ $\vec{c}$ と $\vec{a}$ の内積は△OACに着目。

$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角は不明なので

辺ACの長さを $\vec{c}$ と $\vec{a}$ で表す方法利用。

$$\underbrace{|\overrightarrow{AC}|^2}_{\text{自分の長さの2乗}}=|\vec{c}-\vec{a}|^2=\underbrace{(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})}_{\text{自分と自分の内積}}$$

だから

$$x^2=\vec{c}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}$$

したがって

$$x^2=1-2\vec{c}\cdot\vec{a}+1$$

$$\therefore\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{2-x^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}$$

さて、準備ができたので、ここから p, q, r を求めていく。

OH は 平面ABCに垂直なので、

OH は 辺AB, BC, AC のそれぞれにも垂直となっている。

そこで、

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より　$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ だから

$$(p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$p\vec{a}\cdot\vec{b} - p\vec{a}\cdot\vec{a} + q\vec{b}\cdot\vec{b} - q\vec{b}\cdot\vec{a} + r\vec{c}\cdot\vec{b} - r\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$

$$p\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - p \times 1^2 + q \times 1^2 - q\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + r \times \frac{1}{2} - r\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$p - \frac{x^2}{2}p - p + q - q + \frac{x^2}{2}q + \frac{1}{2}r - r + \frac{x^2}{2}r = 0$$

$$-\frac{x^2}{2}p + \frac{x^2}{2}q + \frac{x^2}{2}r - \frac{1}{2}r = 0 \quad \text{------} ①$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ より　$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ だから

$$(p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$p\vec{a}\cdot\vec{c} - p\vec{a}\cdot\vec{a} + q\vec{b}\cdot\vec{c} - q\vec{b}\cdot\vec{a} + r\vec{c}\cdot\vec{c} - r\vec{c}\cdot\vec{a} = 0$$

$$p\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - p \times 1^2 + q \times \frac{1}{2} - q\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + r \times 1^2 - r\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$p - \frac{x^2}{2}p - p + \frac{1}{2}q - q + \frac{x^2}{2}q + r - r + \frac{x^2}{2}r = 0$$

$$-\frac{x^2}{2}p + \frac{x^2}{2}q + \frac{x^2}{2}r - \frac{1}{2}q = 0 \quad \text{------} ②$$

① − ② より　$-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}q = 0$　$\therefore\ q = r$ ------- ③

ここで　$\boldsymbol{p + q + r = 1}$ ← 3本のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と、その平面上の点Hのベクトル $\overrightarrow{OH}$ の関係 ── ベクトルの確認より

だから ③を代入して　$p + 2q = 1$　$\therefore\ p = 1 - 2q$ ---------- ④

③, ④ を①に代入すると

$$-\frac{x^2}{2}(1 - 2q) + \frac{x^2}{2}q + \frac{x^2}{2}q - \frac{1}{2}q = 0$$

$$-\frac{x^2}{2} + x^2 q + \frac{x^2}{2}q + \frac{x^2}{2}q - \frac{1}{2}q = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)q = 0$$

$$\frac{4x^2 - 1}{2}q = \frac{1}{2}x^2 \qquad \therefore\ q = \frac{1}{2}x^2 \times \frac{2}{4x^2 - 1} = \frac{x^2}{4x^2 - 1}$$

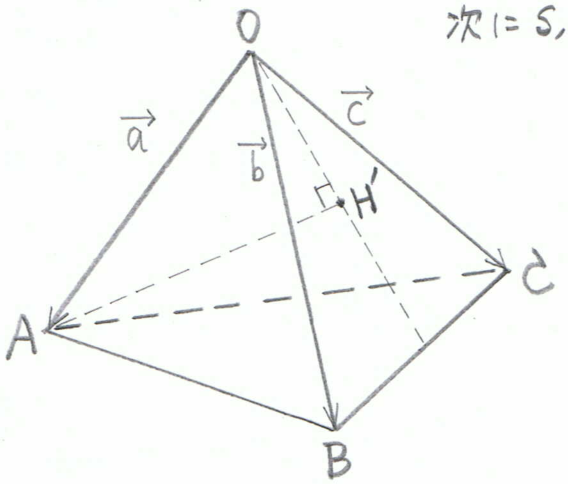
これを④に代入すると

$$p = 1 - 2 \times \frac{x^2}{4x^2-1}$$

$$= \frac{4x^2-1-2x^2}{4x^2-1}$$

$$= \frac{2x^2-1}{4x^2-1}$$

よって $p = \frac{2x^2-1}{4x^2-1}$, $q = r = \frac{x^2}{4x^2-1}$



次に s, t を求める。

AH′ は平面 OBC に垂直なので

AH′ は辺 OB, BC, OC のそれぞれにも

垂直となっている。

そこで

$\overrightarrow{AH'} \perp \overrightarrow{OB}$ より $\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ だから

$$(\overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$(s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$s\vec{b}\cdot\vec{b} + t\vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$$s \times 1^2 + t \times \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$s + \frac{t}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{------} ⑤$$

$\overrightarrow{AH'} \perp \overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ だから

$$(s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$s\vec{b}\cdot\vec{c} + t\vec{c}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

$$s \times \frac{1}{2} + t \times 1^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

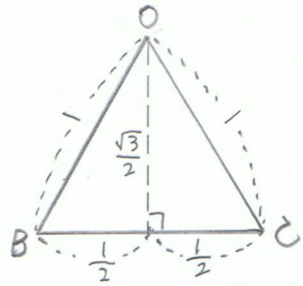
$$\frac{s}{2} + t = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{------} ⑥$$

⑤−⑥より $\frac{s}{2} - \frac{t}{2} = 0 \quad \therefore s = t$

⑤に代入すると $s + \frac{s}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$ $\quad \frac{3}{2}s = \frac{2-x^2}{2} \quad \therefore s = \frac{2-x^2}{3}$

よって $s = t = \frac{2-x^2}{3}$

(2) 底面を△OBCとした四面体を考える。



△OBCは正三角形だから、

その面積は　$\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

四面体の高さはAH′だから

$$\underset{\text{自分の長さの2乗}}{|\overrightarrow{AH'}|^2}=\underset{\text{自分と自分の内積}}{\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{AH'}}=(\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\left(\frac{2-x^2}{3}\vec{b}+\frac{2-x^2}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{2-x^2}{3}\vec{b}+\frac{2-x^2}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)$$

$$=\left\{\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\right\}\cdot\left\{\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}\right\}$$

$$=\left(\frac{2-x^2}{3}\right)^2(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})-2\times\frac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$=\left(\frac{2-x^2}{3}\right)^2(\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c})-\frac{4-2x^2}{3}(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$=\left(\frac{2-x^2}{3}\right)^2\left(1^2+2\times\frac{1}{2}+1^2\right)-\frac{4-2x^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{2}+1-\frac{x^2}{2}\right)+1^2$$

$$=\frac{4-4x^2+x^4}{9}\times3-\frac{4-2x^2}{3}\times(2-x^2)+1$$

$$=\frac{4-4x^2+x^4-(4-2x^2)(2-x^2)+3}{3}$$

$$=\frac{4-4x^2+x^4-8+4x^2+4x^2-2x^4+3}{3}$$

$$=\frac{-x^4+4x^2-1}{3}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AH'}|=\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}$$

求める体積Vは

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{-(x^4-4x^2+4-4)-1}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{-(x^2-2)^2+4-1}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{-(x^2-2)^2+3}}{12}$$

平方完成

$-\underbrace{(x^2-2)^2}+3$

ここは0以上となる。

だから

$(x^2-2)^2=0$のときが

$-(x^2-2)^2+3$は最大となる。

そして当然最大値は3。

$x>0$より　$x=\sqrt{2}$のとき　Vは最大値$\frac{\sqrt{3}}{12}$