$\boxed{3}$ (60 点)

$a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)\ (-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

を示せ．

(1) まず，$y=e^{-x^2}$ のグラフの概形をかく。

$$y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$$

$$y''=-2\{1\cdot e^{-x^2}+xe^{-x^2}\cdot(-2x)\}=-2(1-2x^2)e^{-x^2}$$
$$=2(2x^2-1)e^{-x^2}=4\left(x^2-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}=4\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=0$

$y''=0$ とすると　$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}>0}$$

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘
		変曲点		極大		変曲点	

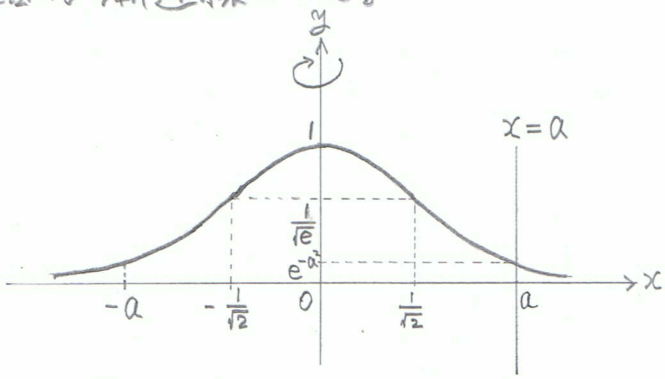
$x=0$ のとき
$y=e^0=1$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき
$$y=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

また　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}e^{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$

だから　x軸は漸近線である。



次に回転体の体積を求める。
y軸のまわりに1回転するので，関数 $y=e^{-x^2}$ を x について解く。

$$e^{-x^2}=y$$
$$-x^2=\log y$$
$$\therefore\ x^2=-\log y$$

$x=\square$ とする必要なし。回転体なので結局2乗するから。

$$\text{求める体積 } V=\underbrace{\int_{e^{-a^2}}^{1}\pi(-\log y)\,dy}_{\text{上側の曲線に沿った部分}}+\underbrace{\pi a^2e^{-a^2}}_{\text{下側の円柱}}$$

回転体を曲線に沿った部分と円柱に分解した。

ここで $\displaystyle\int_{e^{-a^2}}^{1} \pi(-\log y)\,dy$

$$= -\pi \int_{e^{-a^2}}^{1} \log y\,dy$$

$$= -\pi \left\{ \Big[y \log y \Big]_{e^{-a^2}}^{1} - \int_{e^{-a^2}}^{1} y \cdot \frac{1}{y}\,dy \right\}$$

$$= -\pi \left\{ 0 - e^{-a^2} \log e^{-a^2} - \int_{e^{-a^2}}^{1} 1\,dy \right\}$$

$$= -\pi \left\{ -e^{-a^2}(-a^2 \log e) - \Big[y \Big]_{e^{-a^2}}^{1} \right\}$$

$$= -\pi \left\{ -e^{-a^2}(-a^2) - (1 - e^{-a^2}) \right\}$$

$$= -\pi (a^2 e^{-a^2} - 1 + e^{-a^2})$$

よって

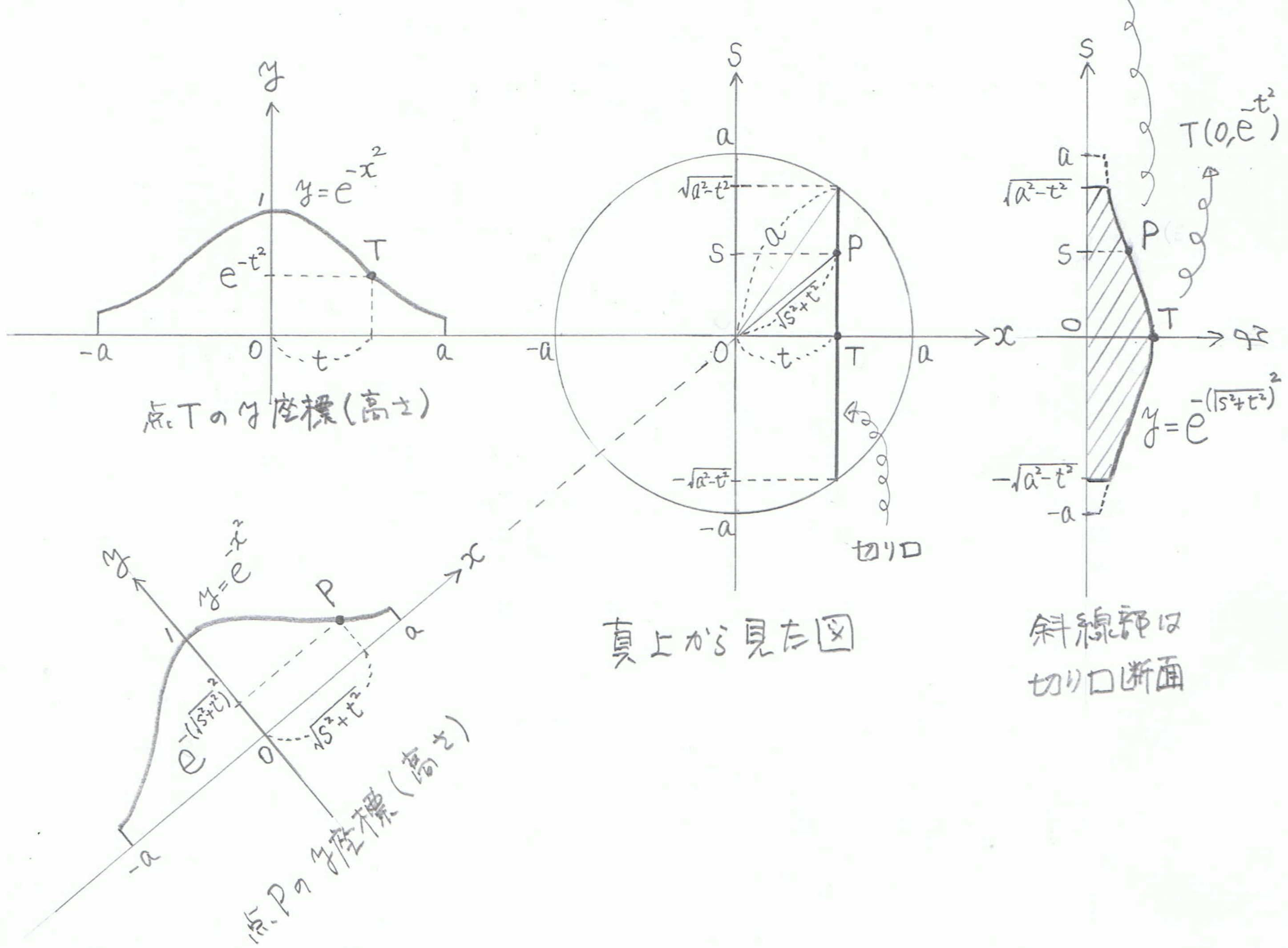
$$V = -\pi (a^2 e^{-a^2} - 1 + e^{-a^2}) + \pi a^2 e^{-a^2}$$

$$= -\pi a^2 e^{-a^2} + \pi - \pi e^{-a^2} + \pi a^2 e^{-a^2}$$

$$= \pi - \pi e^{-a^2}$$

$$= \pi (1 - e^{-a^2})$$

(2)　x軸と垂直な平面で切るのだから、
x軸に垂直な、もう一本の軸をとり、それをs軸とする。
そして、tを定数、sを変数と考える。



切り口の断面の曲線の式を求めるために、
その断面曲線上に任意の点Pをとった。
また、点$(t, 0)$に対する断面曲線上の点をTとした。
断面曲線は　$y = e^{-(\sqrt{s^2+t^2})^2} = e^{-(s^2+t^2)}$　と表せる。
そこで、図の斜線部の切り口の面積は　$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(s^2+t^2)} ds$
そして、この面積$S(t)$と、$\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$の面積と比べてみると
明らかに

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)} ds$$

となっている。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$ ------ ① をよく見ると

$\pi(1-e^{-a^2})$ は (1) で求めた回転体の体積、

この不等式の右辺は (2) の不等式の右辺と似ている。

前の小問を使って、次の小問を解く形が多い。

ということで、(2) の不等式を使って、スタートしてみる。

$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds$ において、

右辺の計算をするとき 変数 s で積分するから、t は定数と見なせるので、$\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds = \int_{-a}^{a} e^{-s^2} \cdot e^{-t^2}ds = e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$

すると、この不等式は

$S(t) \leqq e^{-t^2}\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds$ ------ ②

① の左辺に体積の式 $\pi(1-e^{-a^2})$ が使われているので、

② の左辺を体積の式にかえてみる。

$x=t$ における断面積が $S(t)$ だから、この断面積を

x 軸にそって $-a$ から a まで集めれば体積になるから

② の両辺を $t=-a$ から $t=a$ まで、t で積分する。

$$\int_{-a}^{a} S(t)dt \leqq \int_{-a}^{a} e^{-t^2}\Big(\underbrace{\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds}_{\text{これはsだけの式だから定数と見なせる}}\Big)dt$$

右辺 $= \int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt = \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$ ⟵ $\int_{-a}^{a} e^{-s^2}ds = \int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt$ 積分変数が異なるが値は等しくなるので、①を見て、積分変数を x にかえた。

左辺 $= \int_{-a}^{a} S(t)dt = \pi(1-e^{-a^2})$ ⟵ 断面積を集めると体積

よって $\pi(1-e^{-a^2}) \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2$

両辺の平方根をとると $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx$