4 (60点)

xy 平面上を運動する点Pの時刻 t $(t > 0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

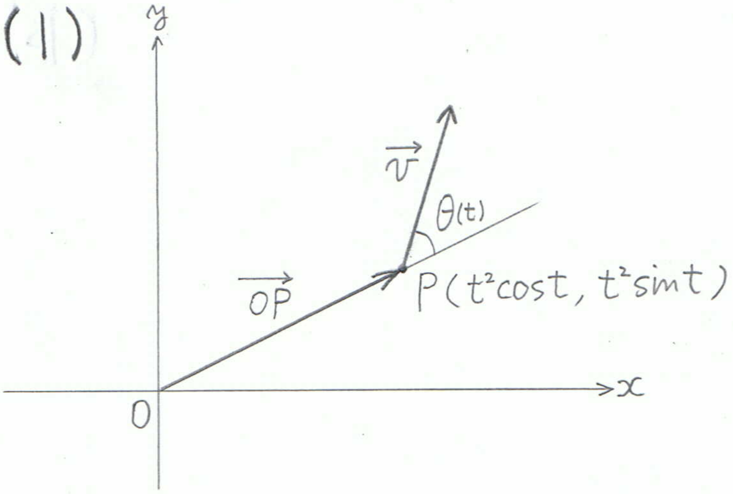
$$x = t^2 \cos t,\ \ y = t^2 \sin t$$

で表されている．原点をOとし，時刻 t におけるPの速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t > 0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，不等式 $t_2 - t_1 < \pi$ を示せ．

(1)



平面上の点の運動

時刻 t における点Pの座標を (x, y) とすると、
時刻 t における点Pの速度 $\vec{v}$ は
$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$
また $\vec{v}$ の大きさは
$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$x=t^2\cos t$ より $\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t$

$y=t^2\sin t$ より $\frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$

したがって $\vec{v}=(2t\cos t-t^2\sin t,\ 2t\sin t+t^2\cos t)$

また $\overrightarrow{OP}=(t^2\cos t,\ t^2\sin t)$

そして

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2&=(2t\cos t-t^2\sin t)^2+(2t\sin t+t^2\cos t)^2\\&=4t^2\cos^2 t-4t^3\cos t\sin t+t^4\sin^2 t\\&\quad+4t^2\sin^2 t+4t^3\cos t\sin t+t^4\cos^2 t\\&=4t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+t^4(\sin^2 t+\cos^2 t)\\&=4t^2+t^4=t^2(4+t^2)\end{aligned}$$

$\therefore |\vec{v}|=\sqrt{t^2(4+t^2)}=t\sqrt{4+t^2}$ ← t>0より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|&=\sqrt{(t^2\cos t)^2+(t^2\sin t)^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}\\&=\sqrt{t^4(\cos^2 t+\sin^2 t)}=\sqrt{t^4}=t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}&=t^2\cos t(2t\cos t-t^2\sin t)+t^2\sin t(2t\sin t+t^2\cos t)\\&=2t^3\cos^2 t-t^4\cos t\sin t+2t^3\sin^2 t+t^4\sin t\cos t\\&=2t^3(\cos^2 t+\sin^2 t)=2t^3\end{aligned}$$

そこで $\overrightarrow{OP}$ と $\vec{v}$ のなす角が $\theta(t)$ なので

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{OP}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^2\times t\sqrt{4+t^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}$$

内積
$\vec{a}=(a_1, a_2)$
$\vec{b}=(b_1, b_2)$
$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 θ のとき、
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

よって $\lim_{t\to\infty}\cos\theta(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}=0$ だから

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$$

(2) $\vec{v}$がy軸に平行になるのは

$\dfrac{dx}{dt}=0$ のときなので

$2t\cos t - t^2\sin t = 0$

$t>0$ だから

$2\cos t - t\sin t = 0$

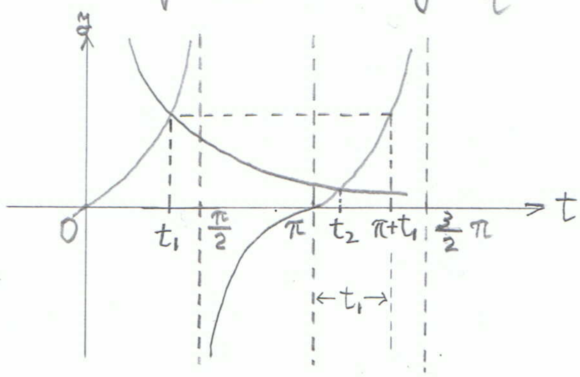
$2\cos t = t\sin t$

$\cos t \neq 0$ だから　sin t = cos t = 0 となる t は無い

$\dfrac{2}{t} = \dfrac{\sin t}{\cos t}$

つまり　$\tan t = \dfrac{2}{t}$ ---- ①

ここで $y=\tan t$ と $y=\dfrac{2}{t}$ のグラフを考える。



①の解は $y=\tan t$ と $y=\dfrac{2}{t}$ の交点の t 座標で表される。

上図より

最も小さい t_1 は、$0<t_1<\dfrac{\pi}{2}$

次に小さい t_2 は $\pi<t_2<\dfrac{3}{2}\pi$

ここで $y=\dfrac{2}{t}$ は単調減少関数だから

$t_2 < \pi + t_1$

したがって

$t_2 - t_1 < \pi$ となる。