5 (60 点)

n を相異なる素数 p_1, p_2, $\cdots$, p_k $(k \geqq 1)$ の積とする. a, b を n の約数とするとき, a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とし,

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする.

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ.

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば, $a = 1$ であることを示せ.

(3) m を自然数とするとき, m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする. $S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ.

(1) α, β, γ は それぞれが相異なる素数の積となっているとする。

$a = G \times \alpha$, $b = G \times \beta$ とおくと α, β は互いに素であり、

$L = G \times \alpha \times \beta$

$n = L \times \gamma$ と表せる。

$$f(a,b) = \frac{L}{G} = \frac{G \times \alpha \times \beta}{G} = \alpha \times \beta \quad \text{-----①}$$

ここで $n = L \times \gamma = G \times \alpha \times \beta \times \gamma$ だから

$f(a,b) = \alpha \times \beta$ は n の約数となっている。

(2) $f(a,b) = b = G \times \beta$

① より $f(a,b) = \alpha \times \beta$ だから

$\alpha \times \beta = G \times \beta$

$\therefore \ \alpha = G$

すると

$a = G \times G$

$b = G \times \beta$

また、$n = G \times G \times \beta \times \gamma$ となるが、

n は相異なる3素数の積であるから

これを満たす G は

$G = 1$ 以外ありえない。

よって $a = 1 \times 1 = 1$ となる。

(3) Gの約数であるような素数の個数を $S(G)$
αの約数であるような素数の個数を $S(\alpha)$
βの約数であるような素数の個数を $S(\beta)$ とする。

すると

$S(a) = S(G) + S(\alpha)$ ⟵ $a = G \times \alpha$ だから

$S(b) = S(G) + S(\beta)$ ⟵ $b = G \times \beta$ だから、

$S(f(a,b)) = S(\alpha) + S(\beta)$ ⟵ $f(a,b) = \alpha \times \beta$ だから.

と表せるので、

$S(f(a,b)) + S(a) + S(b)$

$= S(\alpha) + S(\beta) + S(G) + S(\alpha) + S(G) + S(\beta)$

$= \{S(G) + S(\alpha) + S(\beta)\} \times 2$

よって、偶数となることがわかる。