1 （60 点）

数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 5,\quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．また数列$\{b_n\}$を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ．

(2) すべてのnに対して，不等式$b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ．

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$を求めよ．

2 (60 点)

四面体 OABC において，$OA = OB = OC = BC = 1$，$AB = AC = x$ とする．頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする．頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H′ とする．

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし，$\overrightarrow{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$，$\overrightarrow{OH'} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表す．このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ．

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ．また，x が変化するときの V の最大値を求めよ．

3 (60 点)

$a>0$ とする．曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする．

(1) A の体積 V を求めよ．

(2) 点 $(t,\ 0)\ (-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

を示せ．

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$$

を示せ．

4 (60 点)

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t > 0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = t^2 \cos t,\ \ y = t^2 \sin t$$

で表されている．原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \theta(t)$ を求めよ．

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t > 0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする．このとき，不等式 $t_2 - t_1 < \pi$ を示せ．

5 (60 点)

n を相異なる素数 p_1, p_2, …, p_k $(k \geqq 1)$ の積とする．a, b を n の約数とするとき，a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とし,

$$f(a,\ b) = \frac{L}{G}$$

とする.

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ.

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ.

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする．$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ.