$\boxed{1}$ (60 点)

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする．

(1) 点Pが C_1 上を動くとき，Pと点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ．

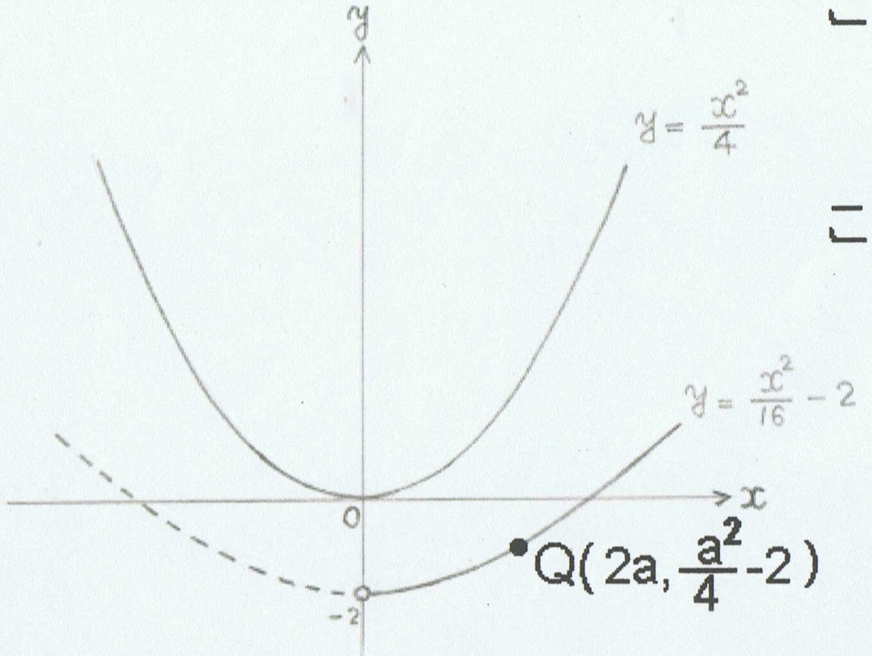
(2) Qを中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする．Pが C_1 上を動き，点Rが C_2 上を動くとき，PとRの距離の最小値を求めよ．

点Q$\left(2a, \frac{a^2}{4}-2\right)$の位置はどこか？

$$\begin{cases} x=2a & \text{より} \quad a=\dfrac{x}{2} \\ y=\dfrac{a^2}{4}-2 & \text{ここに代入すると} \quad y=\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{4}-2=\dfrac{x^2}{16}-2 \end{cases}$$

このとき $a>0$ より $x>0$ となるので

点Qは $y=\dfrac{x^2}{16}-2$ $(x>0)$ の放物線上にある。



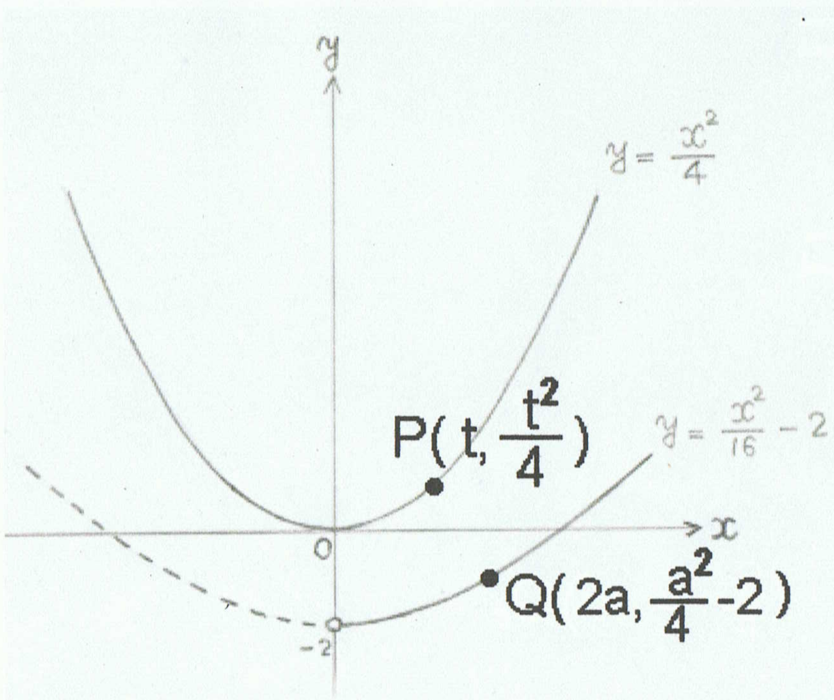
この二つの放物線で、x^2の係数を比較すると

$\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{16}$ であるから

この二つの放物線は、共有点をもたない。

放物線C_1上の動点Pの座標を$\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$とおくと

右図より、PQの最小値は $t \geqq 0$ で考えればよい。



$PQ^2=f(t)$ とおくと

$$f(t)=(t-2a)^2+\left\{\frac{t^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-2\right)\right\}^2$$

$$=(t-2a)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2$$

$$f'(t)=2(t-2a)\cdot 1+2\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\cdot\frac{t}{2}$$

$$=2(t-2a)+t\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)=2t-4a+\frac{t^3}{4}-\frac{a^2}{4}t+2t$$

$$=\frac{t^3}{4}+4t-\frac{a^2}{4}t-4a=\frac{1}{4}(t^3+16t-a^2t-16a)$$

$$=\frac{1}{4}(t^3-a^2t+16t-16a)=\frac{1}{4}\{t(t^2-a^2)+16(t-a)\}$$

$$=\frac{1}{4}\{t(t-a)(t+a)+16(t-a)\}=\frac{1}{4}(t-a)\{t(t+a)+16\}$$

$$=\frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16)$$

$$f'(t)=\frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16)$$

ここで　$t \geqq 0, a>0$ より　$t^2+at+16>0$ だから $f'(t)=0$ となるのは　$t=a$ のとき。

$f(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	0		a	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

$f(t)$ の最小値は

$$f(a)=(a-2a)^2+\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2$$

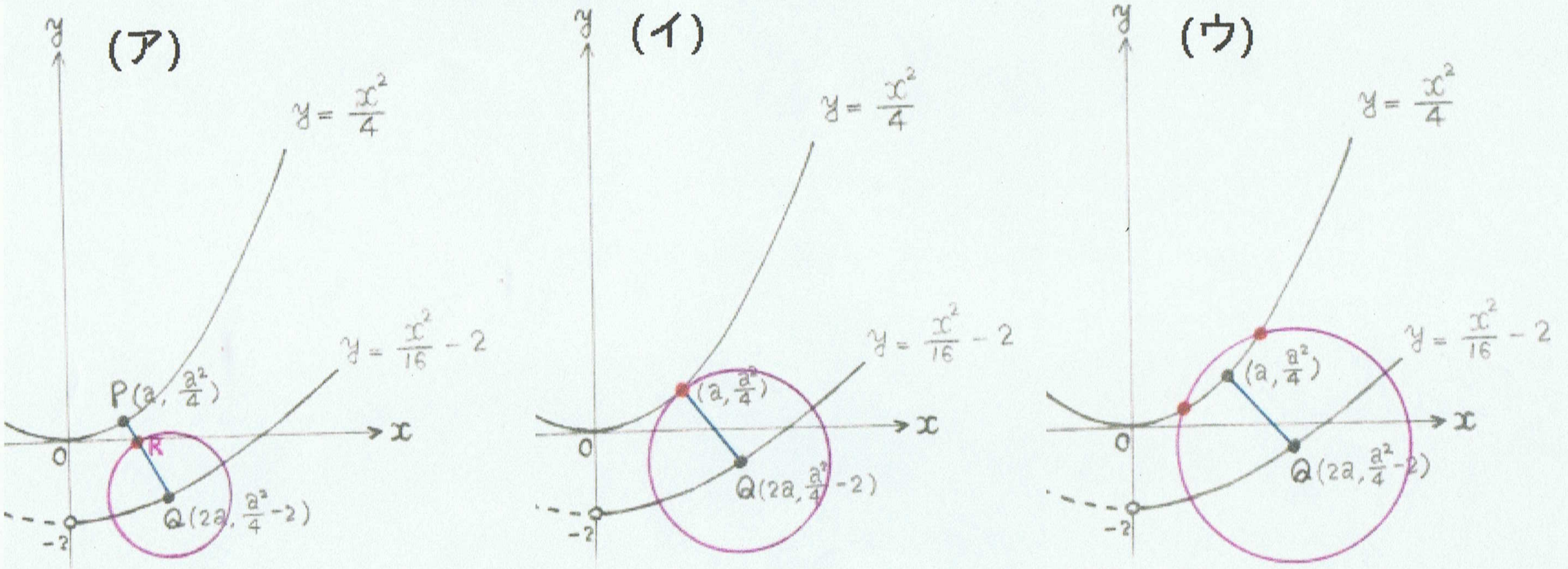
$$=a^2+4>0$$

よって　PQ の最小値は $\sqrt{f(a)}=\underline{\sqrt{a^2+4}}$

(2) 中心が点Q, 半径$\sqrt{2}a$の円C_2上の動点Rと、放物線C_1上の動点Pの距離PRの最小値を求める。

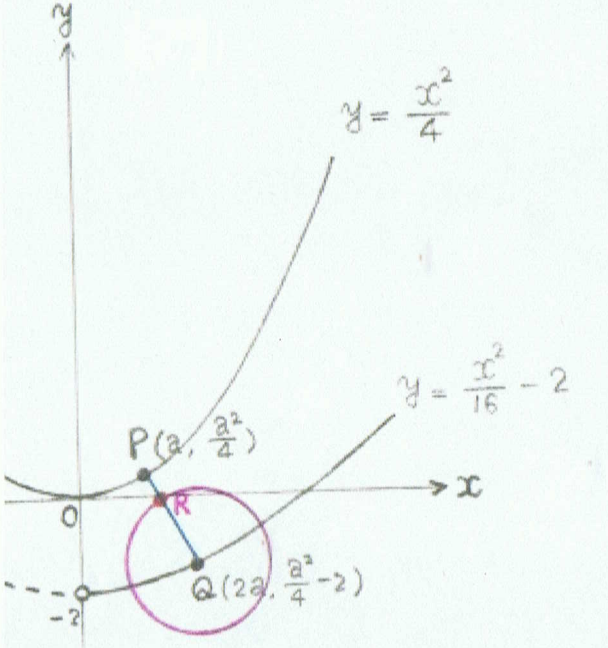
円C_2の半径$\sqrt{2}a$は、aの関数で、aの値によって半径の大きさが変わる。

放物線C_1と円C_2の位置関係は、下図のようになる。



$\sqrt{a^2+4} > \sqrt{2}a$ $\sqrt{a^2+4} = \sqrt{2}a$ $\sqrt{a^2+4} < \sqrt{2}a$

(ア) $\sqrt{a^2+4} > \sqrt{2}a$ のとき　つまり $0<a<2$ のとき

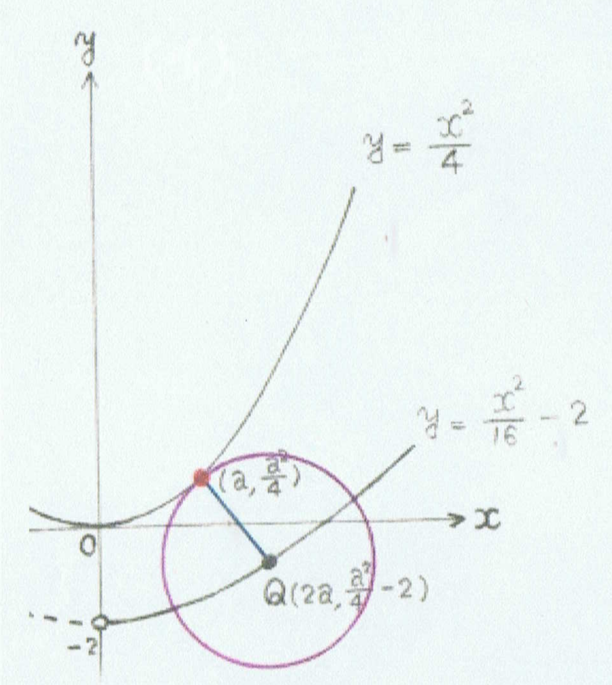


PRの最小値は

(1)で求めたPQの最小値ー円C_2の半径　だから

$$\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$$

（イ）$\sqrt{a^2+4}=\sqrt{2}a$ のとき　つまり $a=2$ のとき

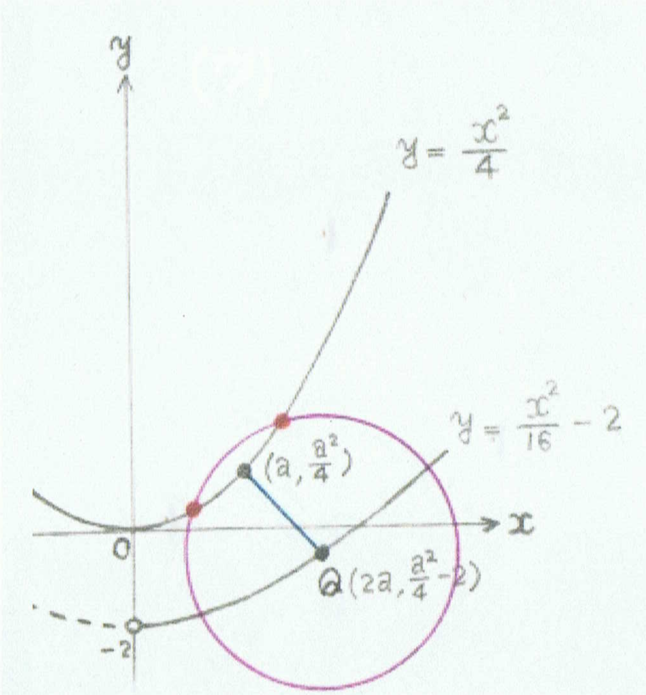


放物線C_1と円C_2は共有点を１個もつから、

この共有点上にPとRがあるとき

PRの最小値は　0　となる。

(ウ) $\sqrt{a^2+4}<\sqrt{2}a$ のとき　つまり $a>2$ のとき



放物線C_1と円C_2は共有点を２個もつから、

PとRが同一共有点上にあるとき

PRの最小値は　0　となる。

以上より　PRの最小値は

$0<a<2$ のとき　$\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$

$2\leqq a$ のとき　　0