2 (60 点)

△ABC を一辺の長さ 6 の正三角形とする．サイコロを 3 回振り，出た目を順に X，Y，Z とする．出た目に応じて，点 P，Q，R をそれぞれ線分 BC，CA，AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

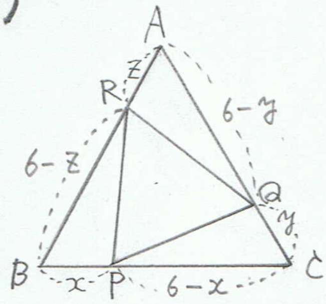
をみたすように取る．

(1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ．

(2) 点 B，P，R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C，Q，P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A，R，Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする．T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ．

(3) △PQRの面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする．m の値および $S=m$ となる確率を求めよ．

(1)



△PQRが正三角形になるのは、$x=y=z$のときであるから

その確率は

$$\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$$

(2)

T_1が正三角形になるのは $x=6-z$ つまり $x+z=6$ ---①

T_2が 〃 $y=6-x$ つまり $x+y=6$ ---②

T_3が 〃 $z=6-y$ つまり $y+z=6$ ---③

ここで、ちょうど2つが正三角形になる場合を考えるのだから、

①,②,③のうちの2つが成り立って1つが成り立たない場合を見つければよい。

そこでまず、①と②が成り立って、③が成り立たない場合を考える。

①−②より $z-y=0$ ∴ $y=z$ ---④

①,②,④が成り立って、③が成り立たないものは、

$(x,y,z)=(1,5,5),(2,4,4),(4,2,2),(5,1,1)$ の4通り

となる。当然$(3,3,3)$は③が成り立ってしまうので除いた。

同様にして、

②と③が成り立って、①が成り立たない場合も4通り、

①と③が成り立って、②が成り立たない場合も4通り

となることは明らかである。

したがって、求める確率は

$$\frac{4\times3}{6^3}=\frac{1}{18}$$

(3)

$$S = \triangle ABC - (\triangle BPR + \triangle CQP + \triangle ARQ)$$

$$= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \left\{\frac{1}{2}\times x\times(6-z)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times y\times(6-x)\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times z\times(6-y)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$= 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\{x(6-z) + y(6-x) + z(6-y)\}$$

$$= 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\{6x - xz + 6y - xy + 6z - yz\}$$

{ }の中をxに着目して整頓

$$= 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\{x(6-y-z) + 6y + 6z - yz\}$$

$y+z$をまとめておく

$$= 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left[x\{6-(y+z)\} + 6(y+z) - yz\right]$$

ここで $T = x\{6-(y+z)\} + 6(y+z) - yz$ とおくと

Sが最小となるのは、Tが最大のときであることがわかる。

そこで Tの最大値をさがす作業に入る。

Tを最大にするためには、先頭の項 $x\{6-(y+z)\}$ が 0や負ではなく、正となる必要があるので、$y+z \leqq 5$ ということがわかる。

そこで
$y+z=5$のとき $T = x(6-5) + 6\times 5 - yz = x + 30 - yz$
$y+z=4$のとき $T = x(6-4) + 6\times 4 - yz = 2x + 24 - yz$
$y+z=3$のとき $T = x(6-3) + 6\times 3 - yz = 3x + 18 - yz$
$y+z=2$のとき $T = x(6-2) + 6\times 2 - yz = 4x + 12 - yz$ ----⑤

⑤の各式を最大とするためには $x=6$ とする必要がある。

すると ⑤の各式は全て $T = 36 - yz$ となる。

そこで Tを最大とする y, z は $y = z = 1$ であることがわかる。

このときのTの値は $T = 36 - 1\times 1 = 35$ となる。

したがって

Sのとりうる値の最小値 $m = 9\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\times 35 = \frac{36\sqrt{3} - 35\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

これが $(x, y, z) = (6, 1, 1), (1, 6, 1), (1, 1, 6)$ で成り立つことは Sの式から当然わかるので、

$S = m$ となる確率は $\frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$