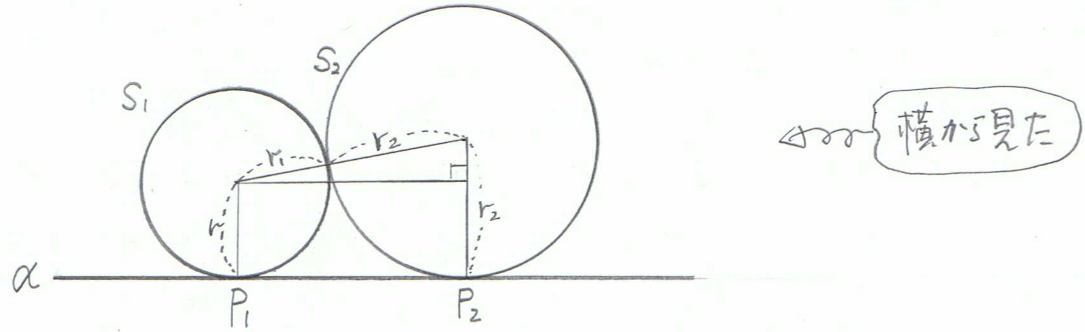
3 (60 点)

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している．

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える．それらの球と α の接点は，1つの円の上または1つの直線の上にあることを示せ．

(1)



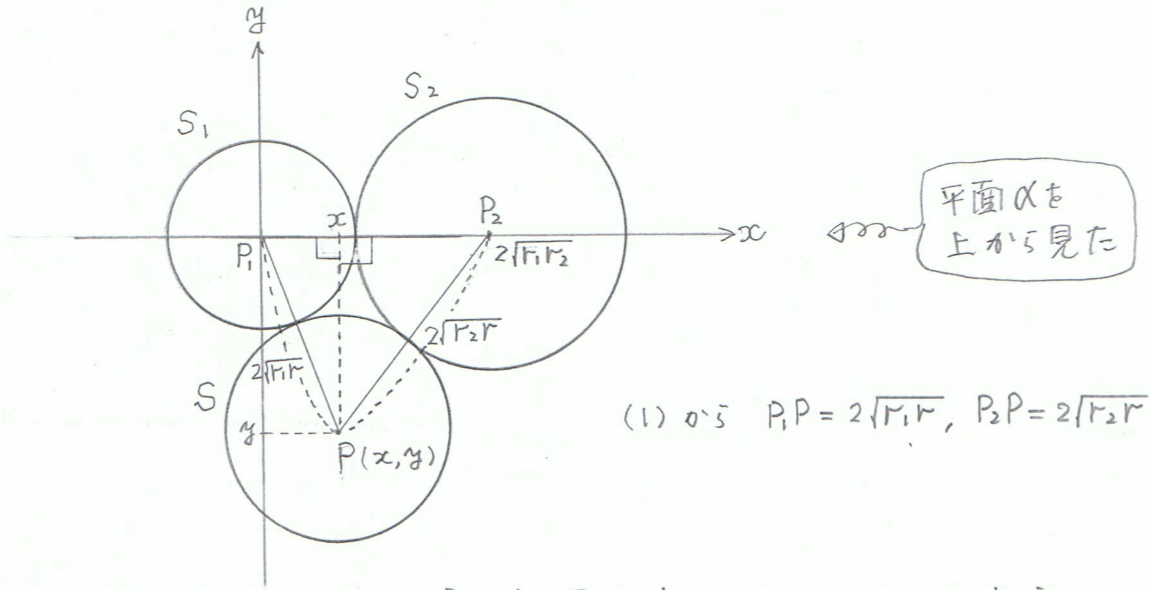
三平方の定理を使って

$$P_1P_2^{\,2} = (r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 = r_1^2+2r_1r_2+r_2^2-r_1^2+2r_1r_2-r_2^2 = 4r_1r_2$$

$P_1P_2 > 0$ より $P_1P_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$

(2) S_1 と S_2 の両方に外接している球を S とし、その半径を r, 平面 α と接する点を P とする。

ここで平面 α 上に、原点を P_1 とし、P_2 を x 軸上の正の部分となるような xy 軸を設定する。このとき点 P の座標を (x, y) とする。



(1) から $P_1P = 2\sqrt{r_1r}$, $P_2P = 2\sqrt{r_2r}$ となる。

上図において、三平方の定理を使って次の各式が成立つ。

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4r_1r & \text{----- ①} \\ (2\sqrt{r_1r_2}-x)^2+y^2 = 4r_2r & \text{----- ②} \end{cases}$$

① より $r = \dfrac{x^2+y^2}{4r_1}$

② に代入すると $(2\sqrt{r_1r_2}-x)^2+y^2 = 4r_2 \times \dfrac{x^2+y^2}{4r_1}$

これを整頓していくと

$$4r_1r_2 - 4\sqrt{r_1r_2}\,x + x^2 + y^2 = \frac{r_2}{r_1}(x^2+y^2)$$

$$4r_1^2r_2 - 4r_1\sqrt{r_1r_2}\,x + r_1x^2 + r_1y^2 = r_2x^2 + r_2y^2$$

$$(r_1-r_2)x^2 - 4r_1\sqrt{r_1r_2}\,x + (r_1-r_2)y^2 + 4r_1^2r_2 = 0 \quad \text{----- ③}$$

(ア)　$r_1 = r_2$ のとき

③より　$-4r_1\sqrt{r_1 r_1}\,x + 4r_1^2 r_1 = 0$

$$-4r_1^2 x = -4r_1^3$$

$$\therefore\ x = r_1$$

つまり点Pは直線 $x = r_1$ 上にある。

(イ)　$r_1 \neq r_2$ のとき

③の両辺に $\dfrac{1}{r_1 - r_2}$ をかけると

$$x^2 - \frac{4r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}x + y^2 + \frac{4r_1^2 r_2}{r_1 - r_2} = 0$$

x の項を平方完成していくと

$$x^2 - \frac{4r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}x + \left(\frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 - \left(\frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 + y^2 + \frac{4r_1^2 r_2}{r_1 - r_2} = 0$$

$$\left(x - \frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 - \frac{4r_1^2 r_2}{r_1 - r_2}$$

$$\left(x - \frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 + y^2 = \frac{4r_1^2 r_1 r_2 - 4r_1^2 r_2(r_1 - r_2)}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$\left(x - \frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 + y^2 = \frac{4r_1^3 r_2 - 4r_1^3 r_2 + 4r_1^2 r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$\left(x - \frac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}\right)^2 + y^2 = \frac{4r_1^2 r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}$$

つまり点Pは中心 $\left(\dfrac{2r_1\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{2r_1 r_2}{|r_1 - r_2|}$ の円上にある。

したがって(ア)，(イ)より

点Pは、1つの円の上または1つの直線の上にある。