4 (60 点)

n を 2 以上の自然数とする.

(1) n が素数または 4 のとき, $(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ.

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき, $(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ.

(1) nが2以上の素数のとき、nにはnより小さい約数が1以外ないので、$\dfrac{(n-1)!}{n}$は約分して分母を1とすることができない。

よって$(n-1)!$はnで割り切れない。

nが4のとき $\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{3!}{4}=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{4}=\dfrac{3}{2}$ となり、割り切れない。

したがってnが素数または4のとき、$(n-1)!$はnで割り切れない。

(2) nが2以上の自然数で、素数でなくかつ4でもないので、nは6以上の合成数である。

㋐ $2\leqq a<b<n$となる自然数a,bを用いて、$n=ab$と表せるとき、

nが素数の平方数でないとき

$2\leqq a<b<ab$ より

$2\leqq a<b\leqq ab-1$ となるので、

$(ab-1)!$の中にaもbも存在するから

$\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{(ab-1)!}{ab}$ の分母abは約分されて1となってしまう。

㋑ 素数rを $2<r$ とする

この両辺にrをかけると

$2r<r^2$

すると $2<r<2r<r^2$ となるので

$2<r<2r\leqq r^2-1$

$(r^2-1)!$の中にrも$2r$も存在するから

nが素数の平方数のとき

9, 25, 49, …

$n=r^2$と表せるとき、

$\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{(r^2-1)!}{r^2}$ の分母r^2は約分されて1となってしまう。

したがって ㋐, ㋑ により

nが素数でなくかつ4でもないとき、$(n-1)!$はnで割り切れる。