5

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ.

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3\sin t + 3\sin 3t \\ &= -3\sin t + 3(3\sin t - 4\sin^3 t) \\ &= 6\sin t - 12\sin^3 t \\ &= 6\sin t(1 - 2\sin^2 t) \\ &= 12\sin t\left(\frac{1}{2} - \sin^2 t\right) \\ &= 12\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin t\right)\end{aligned}$$

3倍角の公式

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3\cos t - 3\cos 3t \\ &= 3\cos t - 3(4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 12\cos t - 12\cos^3 t \\ &= 12\cos t(1 - \cos^2 t) \\ &= 12\cos t\sin^2 t\end{aligned}$$

$\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $\sin t = 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より $t = 0,\ \frac{\pi}{4}$

$\frac{dy}{dt} = 0$ とすると $\sin t = 0,\ \cos t = 0$

$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ より $t = 0,\ \frac{\pi}{2}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0
(x, y)	$(2, 0)$	↗	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	↖	$(0, 4)$

接線の傾き

$\frac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ で求める。

$t = \frac{\pi}{4}$ のときの点における接線の傾きは $\frac{+}{0}$ より ∞

$t = \frac{\pi}{2}$ のときの点における接線の傾きは $\frac{0}{-}$ より 0

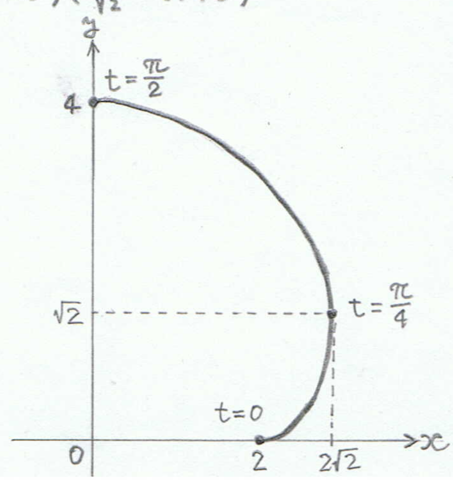
$t = 0$ のときの点における接線の傾きは $\frac{0}{0}$ で不定形だから、きちんと調べてみる必要がある。

$$\lim_{t \to +0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to +0} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \lim_{t \to +0} \frac{12\cos t\sin^2 t}{12\sin t\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin t\right)}$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\cos t\sin t}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin t\right)}$$

$$= 0$$

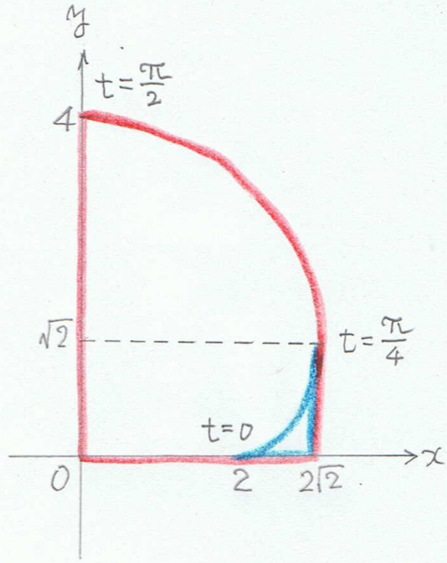
よって曲線Cの概形は右図。



(2) 求める面積をSとすると、

Sは右図の赤で囲まれた面積から

青で囲まれた面積を引けばよい。



$$S=\int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx-\int_2^{2\sqrt{2}} y\,dx$$

定積分の性質

$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

$$=\int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx-\left(-\int_{2\sqrt{2}}^{2} y\,dx\right)$$

$$=\int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx+\int_{2\sqrt{2}}^{2} y\,dx$$

定積分の性質

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$=\int_a^b f(x)dx$

$$=\int_0^2 y\,dx$$

負角の公式　$\cos(-\theta)=\cos\theta$

半角の公式　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

積を和差の公式

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

ここで

x	$0 \cdots 2$
t	$\frac{\pi}{2} \cdots 0$

だから

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt$$ see 置換積分

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(3\sin t-\sin3t)(-3\sin t+3\sin3t)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(-9\underbrace{\sin^2t}_{半角}+9\underbrace{\sin t\sin3t}_{積を和差}+3\underbrace{\sin3t\sin t}_{積を和差}-3\underbrace{\sin^23t}_{半角})dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left\{-9\times\frac{1-\cos2t}{2}+9\times\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos4t-\underbrace{\cos(-2t)}_{負角})+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos4t-\cos2t)-3\times\frac{1-\cos6t}{2}\right\}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\cos2t-\frac{9}{2}\cos4t+\frac{9}{2}\cos2t-\frac{3}{2}\cos4t+\frac{3}{2}\cos2t-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cos6t\right)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-6+\frac{21}{2}\cos2t-6\cos4t+\frac{3}{2}\cos6t\right)dt$$

$$=\left[-6t+\frac{21}{2}\times\frac{1}{2}\sin2t-6\times\frac{1}{4}\sin4t+\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}\sin6t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$=0-\left(-6\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3\pi$$