1 (60 点)

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする．

(1) 点 P が C_1 上を動くとき，P と点 Q $\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ．

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする．P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ．

2 (60 点)

$\triangle$ABC を一辺の長さ 6 の正三角形とする．サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする．出た目に応じて，点 P，Q，R をそれぞれ線分 BC，CA，AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたすように取る．

(1) $\triangle$PQR が正三角形になる確率を求めよ．

(2) 点 B，P，R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C，Q，P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A，R，Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする．T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ．

(3) $\triangle$PQR の面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする．m の値および $S=m$ となる確率を求めよ．

3 (60 点)

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している．

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ．

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える．それらの球と α の接点は，1つの円の上または1つの直線の上にあることを示せ．

4 (60 点)

n を 2 以上の自然数とする.

(1) n が素数または 4 のとき, $(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ.

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき, $(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ.

5 (60 点)

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ.

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.