$\boxed{1}$ (60 点)

次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

(i) N の正の約数は 12 個.

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

N の正の約数を小さいほうから順に、a1,a2,a3, ・・・・・・・ ,a12 とする。

N の7番目の約数が12であり、12の約数が、1，2，3，4，6，12 であることから、

1，2，3，4，6，12 も N の約数でのあることがわかる。

そこで、自然数の並びを考慮すると約数となるかもしれない5も含めて、これらを並べてみると、次の2つの場合が考えられる。

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
(ア)	1	2	3	4	5	6	12					

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
(イ)	1	2	3	4	6		12					

ここで、約数を小さい方から順に並べたとき、次のような性質がある。

例えば、12 の6個の約数は

a1	a2	a3	a4	a5	a6
1	2	3	4	6	12

3×4＝12

2×6＝12

1×12＝12

このように、a1・a6＝a2・a5＝a3・a4＝12 となっている。

だから、N の12個の約数も、a1・a12＝a2・a11＝a3・a10＝a4・a9＝a5・a8＝a6・a7＝N となっている。

すると、(ア)の場合は、a6・a7＝6×12＝72 で、N＝72ということになるので

a5・a8＝5×a8＝72 となる必要がある。

ところが、a8＝72÷5＝14．4 となって、a8 が小数になってしまうので

a8 はNの約数とはならない。

したがって、(イ)の場合が良いことになる。

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
(イ)	1	2	3	4	6		12					

a6 に入る整数は、7，8，9，10，11 が考えられる。

そこで、これらの整数を一つづつ当てはめて、調べていくことにする。

まず、a6 に 7を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	7	12					

a6・a7＝7×12＝84

84 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84

また、84を素因数分解すると、$84=2^2\times3^1\times7^1$ となるから、約数の個数は

(2+1)(1+1)(1+1)＝12個　となっている。

次に、a6 に 8を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	8	12					

a6・a7＝8×12＝96

96 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	96

また、96を素因数分解すると、$96=2^5\times3^1$ となるから、約数の個数は

(5+1)(1+1)＝12個　となっている。

次に、a6 に 9を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	9	12					

a6・a7＝9×12＝108

108 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108

また、108を素因数分解すると、$108=2^2\times3^3$ となるから、約数の個数は

(2+1)(3+1)＝12個　となっている。

次に、a6 に 10を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	10	12					

a6・a7＝10×12＝120

120 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	10	12	20	30	40	60	120

また、120を素因数分解すると、$120=2^3\times3^1\times5^1$ となるから、約数の個数は

(3+1)(1+1)(1+1)＝16個　となっているので、***a6 に10は入らない。***

次に、a6 に 11を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	11	12					

a6・a7＝11×12＝132

132 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	11	12	22	33	44	66	132

また、132を素因数分解すると、$132=2^2\times3^1\times11^1$ となるから、約数の個数は

(2+1)(1+1)(1+1)＝12個　となっている。

したがって、求める正の整数N は

N ＝ 84, 96, 108, 132

である。