

1

(60点)

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

(i) N の正の約数は 12 個.

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

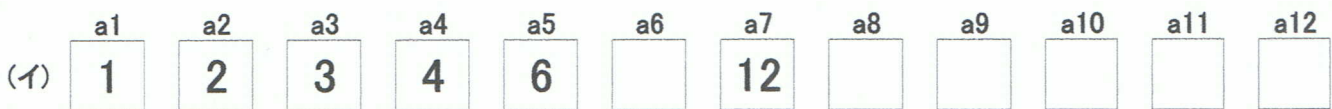
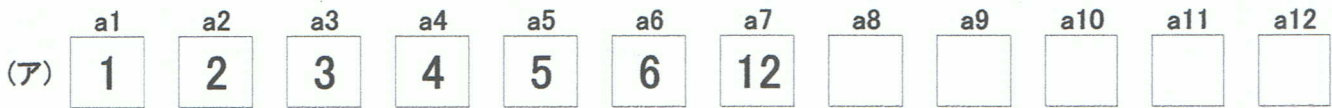
N の正の約数を小さいほうから順に、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ とする。

N の7番目の約数が12であり、12の約数が、1, 2, 3, 4, 6, 12 であることから、

1, 2, 3, 4, 6, 12 も N の約数であることがわかる。

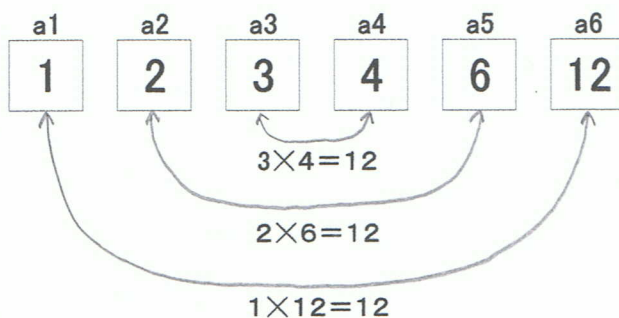
そこで、自然数の並びを考慮すると約数となるかもしれない5も含めて、これらを並べて

みると、次の2つの場合が考えられる。



ここで、約数を小さい方から順に並べたとき、次のような性質がある。

例えば、12 の6個の約数は



このように、 $a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4 = 12$ となっている。

だから、N の12個の約数も、 $a_1 \cdot a_{12} = a_2 \cdot a_{11} = a_3 \cdot a_{10} = a_4 \cdot a_9 = a_5 \cdot a_8 = a_6 \cdot a_7 = N$

となっている。

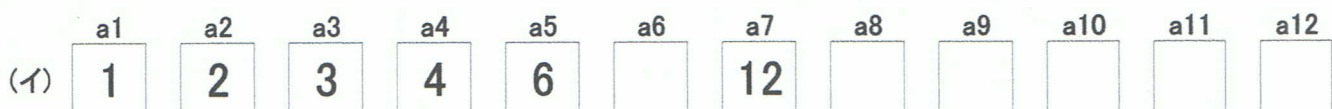
すると、(ア)の場合は、 $a_6 \cdot a_7 = 6 \times 12 = 72$ で、 $N = 72$ ということになるので

$$a_5 \cdot a_8 = 5 \times a_8 = 72 \quad \text{となる必要がある。}$$

ところが、 $a_8 = 72 \div 5 = 14.4$ となって、 a_8 が小数になってしまうので

a_8 はNの約数とはならない。

したがって、(イ)の場合が良いことになる。



a_6 に入る整数は、7, 8, 9, 10, 11 が考えられる。

そこで、これらの整数を一つずつ当てはめて、調べていくことにする。

まず、a6 に 7 を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	7	12					

$$a6 \cdot a7 = 7 \times 12 = 84$$

84 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	7	12	14	21	28	42	84

また、84 を素因数分解すると、 $84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$ となるから、約数の個数は $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ 個 となっている。

次に、a6 に 8 を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	8	12					

$$a6 \cdot a7 = 8 \times 12 = 96$$

96 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	96

また、96 を素因数分解すると、 $96 = 2^5 \times 3^1$ となるから、約数の個数は $(5+1)(1+1) = 12$ 個 となっている。

次に、a6 に 9 を入れてみる。

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	9	12					

$$a6 \cdot a7 = 9 \times 12 = 108$$

108 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、a8 から a12 までを求めると

a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12
1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108

また、108 を素因数分解すると、 $108 = 2^2 \times 3^3$ となるから、約数の個数は $(2+1)(3+1) = 12$ 個 となっている。

次に、 a_6 に 10 を入れてみる。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	4	6	10	12					

$$a_6 \cdot a_7 = 10 \times 12 = 120$$

120 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、 a_8 から a_{12} までを求めると

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	4	6	10	12	20	30	40	60	120

また、120 を素因数分解すると、 $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ となるから、約数の個数は $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ 個 となっているので、 a_6 に 10 は入らない。

次に、 a_6 に 11 を入れてみる。

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	4	6	11	12					

$$a_6 \cdot a_7 = 11 \times 12 = 132$$

132 は、1, 2, 3, 4, 6 で割り切れるから、 a_8 から a_{12} までを求めると

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	4	6	11	12	22	33	44	66	132

また、132 を素因数分解すると、 $132 = 2^2 \times 3^1 \times 11^1$ となるから、約数の個数は $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$ 個 となっている。

したがって、求める正の整数 N は

$$N = 84, 96, 108, 132$$

である。