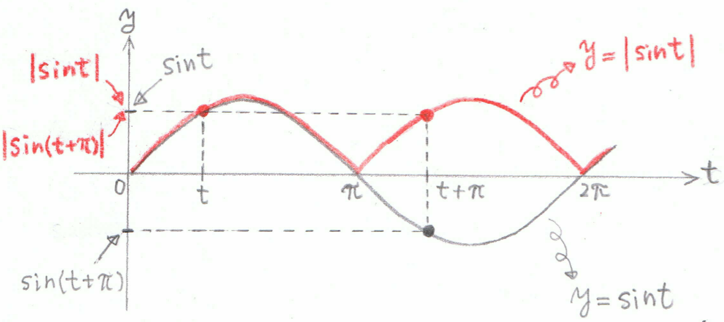
$\boxed{2}$ (60 点)

実数 x の関数 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ.

与えられた関数f(x)に三角関数が使われているので、まず、周期を調べてみよう。



$g(t)=\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$ とおくと、左図より

分子は $|\sin t|=|\sin(t+\pi)|$ だから

分子の周期は π である。

分母は $\sin^2 t=\sin^2(t+\pi)$ より

$1+\sin^2 t=1+\sin^2(t+\pi)$ だから

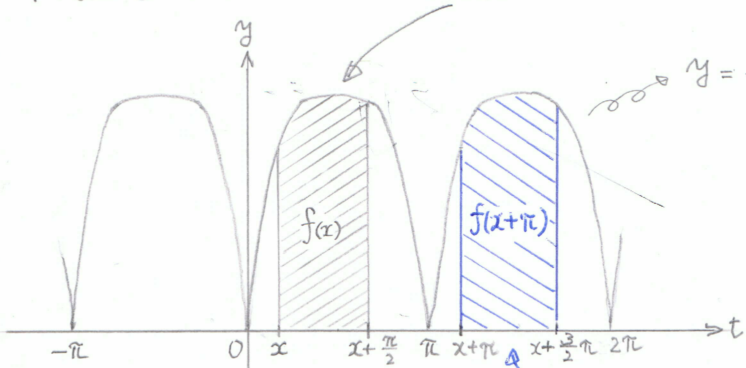
分母の周期も π である。

周期関数
$g(x)=g(x+p)$ (pは0でない定数)
が成り立つとき、$g(x)$はpを周期とする周期関数という。

したがって $\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}=\dfrac{|\sin(t+\pi)|}{1+\sin^2(t+\pi)}$ だから $g(t)$も周期πである。

すると $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ は 下図の斜線部の面積を表すことがわかる。

関数 $y=\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$ のグラフは
$|\sin t|\geqq 0$, $1+\sin^2 t>0$
だから $\dfrac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\geqq 0$
となり、また周期はπなので右図のようになる。



また $f(x+\pi)=\displaystyle\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$ は上図の青斜線部の面積を表すことがわかるから $f(x)=f(x+\pi)$ となって、$f(x)$も周期はπである。

これから $f(x)$の増減を調べて、最大値, 最小値を求めよう。

定積分で表された関数

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$　　$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt=\frac{|\sin(x+\frac{\pi}{2})|}{1+\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}\cdot(x)'$$

$$=\frac{|\sin(x+\frac{\pi}{2})|}{1+\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}=\frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}$$

$$=\frac{|\cos x|(1+\sin^2 x)-|\sin x|(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$\sin^2 x=|\sin x|^2$
$\cos^2 x=|\cos x|^2$

$$=\frac{|\cos x|(1+|\sin x|^2)-|\sin x|(1+|\cos x|^2)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$
\begin{aligned}
分子 &= |\cos x|(1+|\sin x|^2) - |\sin x|(1+|\cos x|^2) \\
&= |\cos x| + |\cos x||\sin x|^2 - |\sin x| - |\sin x||\cos x|^2 \\
&= |\cos x| - |\sin x| + |\sin x||\cos x|(|\sin x| - |\cos x|) \\
&= |\cos x| - |\sin x| - |\sin x||\cos x|(|\cos x| - |\sin x|) \\
&= (|\cos x| - |\sin x|)(1 - |\sin x||\cos x|) \\
&= (|\cos x| - |\sin x|)(1 - |\sin x\cos x|) \\
&= (|\cos x| - |\sin x|)(1 - |\tfrac{1}{2}\sin 2x|) \\
&= (|\cos x| - |\sin x|)(1 - \tfrac{1}{2}|\sin 2x|)
\end{aligned}
$$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

よって

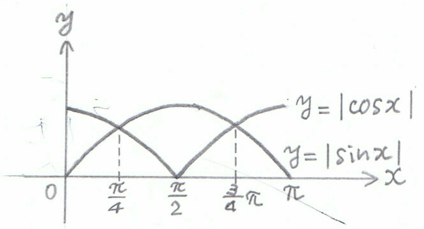
$$f'(x) = \frac{(|\cos x| - (|\sin x|)(1-\frac{1}{2}|\sin 2x|)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

ここで $(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x) > 0$, $1-\frac{1}{2}|\sin 2x| > 0$ だから

$f'(x) = 0$ となるのは

$$|\cos x| - |\sin x| = 0$$

$$|\cos x| = |\sin x|$$



$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲では

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ のとき。

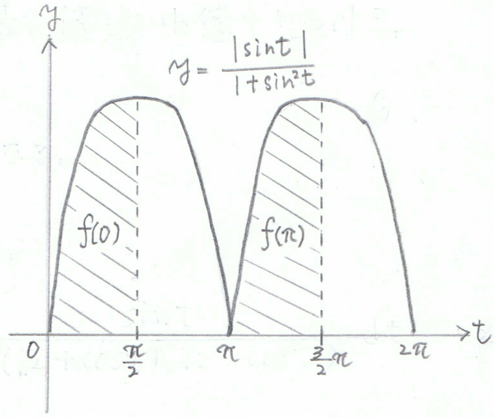
そこで、増減表を作ってみる。

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

ここで $f(0)$ と $f(\pi)$ について考えてみる。

$$f(0) = \int_0^{0+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$f(\pi) = \int_\pi^{\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt = \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$



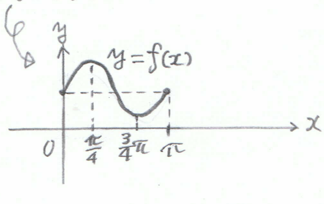
これらは右図の斜線部の面積を表すから

$f(0) = f(\pi)$ となっていることがわかる。

また、$f(x)$の周期がπだということからも $f(0) = f(0+\pi) = f(\pi)$ となる。

したがって $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で考えれば良く、また $f(0) = f(\pi)$ だから

$f(x)$ は $x = \frac{\pi}{4}$ で最大, $x = \frac{3}{4}\pi$ で最小となる。



$f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{3}{4}\pi)$を求めるために、事前に不定積分 $\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ を求めておこう。

$$\int \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt = \int \frac{\sin t}{1+1-\cos^2 t}dt = \int \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{\sin t}{(\sqrt{2}-\cos t)(\sqrt{2}+\cos t)}dt$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)dt$$

部分分数 $\frac{A}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{A}{\sqrt{2}+\cos t} = \frac{\sin t}{(\sqrt{2}-\cos t)(\sqrt{2}+\cos t)}$

$A(\sqrt{2}+\cos t) + A(\sqrt{2}-\cos t) = \sin t$

$2\sqrt{2}A = \sin t \quad \therefore A = \frac{\sin t}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}-\cos t} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}+\cos t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\log(\sqrt{2}-\cos t) - \log(\sqrt{2}+\cos t)\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t} + C$$

すると

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{\sqrt{2}-\cos\frac{3}{4}\pi}{\sqrt{2}+\cos\frac{3}{4}\pi} - \log\frac{\sqrt{2}-\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}+\cos\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{\sqrt{2}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}+(-\frac{1}{\sqrt{2}})} - \log\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log\frac{\frac{2+1}{\sqrt{2}}}{\frac{2-1}{\sqrt{2}}} - \log\frac{\frac{2-1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\log 3 - \log\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log(3\div\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 9 = \frac{1}{\sqrt{2}}\log 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

$$f(\tfrac{3}{4}\pi) = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

絶対値のはずし方 $|\sin t| = \begin{cases} \sin t & (0 \leqq t \leqq \pi) \\ -\sin t & (\pi \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}\right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\log\frac{\sqrt{2}-\cos\pi}{\sqrt{2}+\cos\pi} - \log\frac{\sqrt{2}-\cos\frac{3}{4}\pi}{\sqrt{2}+\cos\frac{3}{4}\pi} - \left(\log\frac{\sqrt{2}-\cos\frac{5}{4}\pi}{\sqrt{2}+\cos\frac{5}{4}\pi} - \log\frac{\sqrt{2}-\cos\pi}{\sqrt{2}+\cos\pi}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\log\frac{\sqrt{2}-(-1)}{\sqrt{2}+(-1)} - \log\frac{\sqrt{2}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}+(-\frac{1}{\sqrt{2}})} - \log\frac{\sqrt{2}-(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}+(-\frac{1}{\sqrt{2}})} + \log\frac{\sqrt{2}-(-1)}{\sqrt{2}+(-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2 \left(\log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \log \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \log \frac{\frac{2+1}{\sqrt{2}}}{\frac{2-1}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \log 3 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{3(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

以上より

$f(x)$ の最大値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \log 3$

$f(x)$ の最小値は $\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$