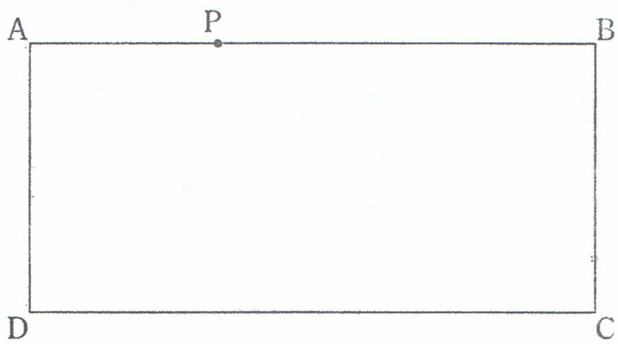
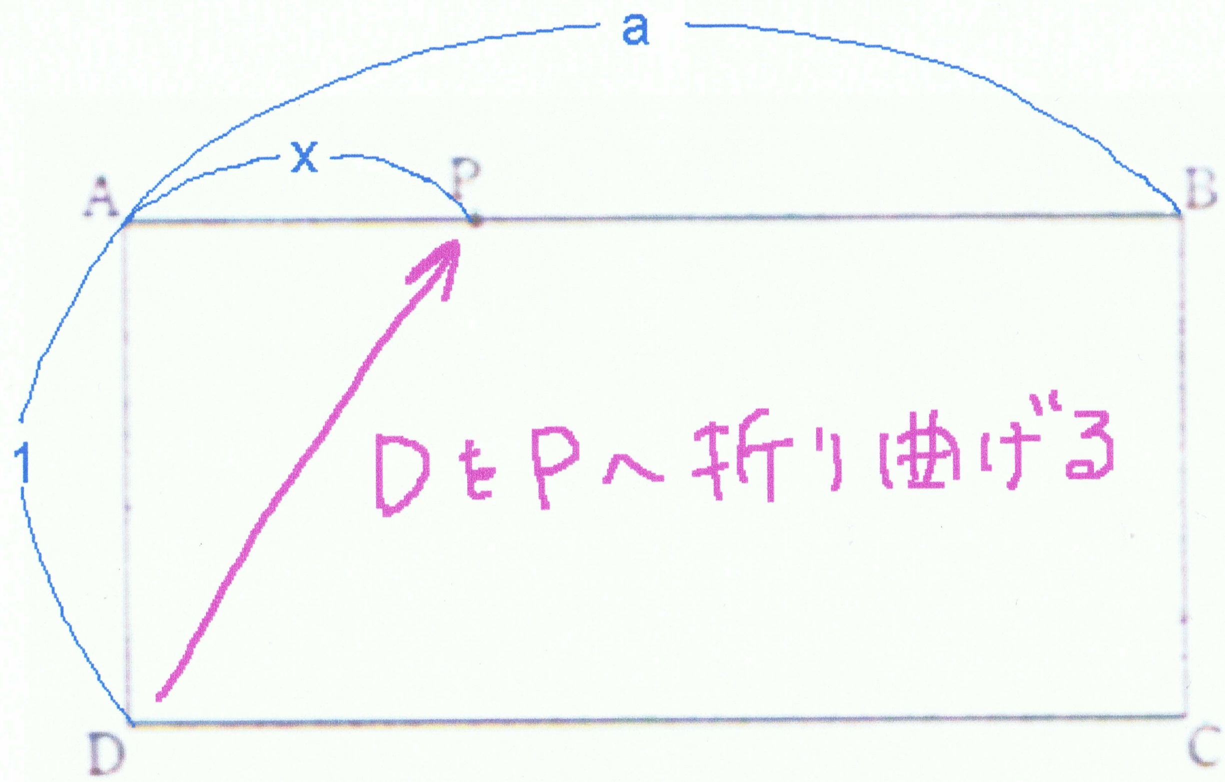
3 (60 点)

aを1以上の実数とする．図のような長方形の折り紙ABCDが机の上に置かれている．ただし AD = 1，AB = a である．Pを辺AB上の点とし，AP = x とする．頂点Dを持ち上げてPと一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形ABCDからはみ出る部分の面積をSとする．

(1) Sをaとxで表せ．

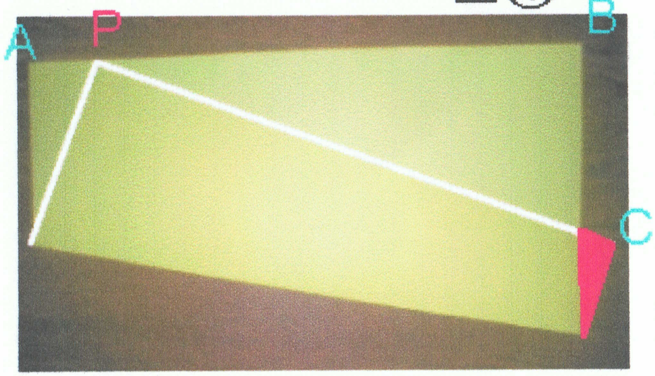
(2) $a = 1$とする．PがAからBまで動くとき，Sを最大にするようなxの値を求めよ．



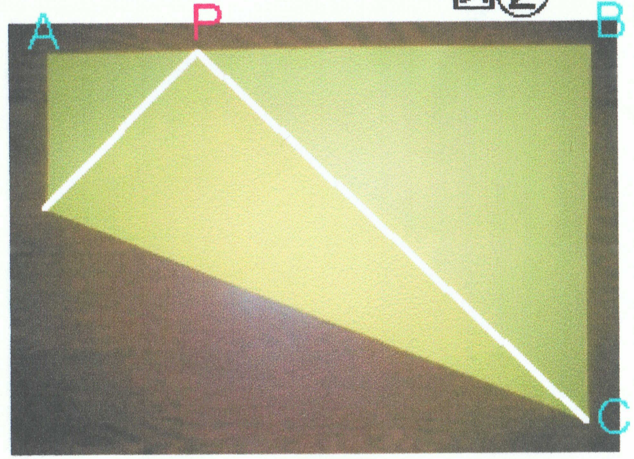


(1)長方形ABCDからはみ出る部分の面積Sをaとxで表せ。

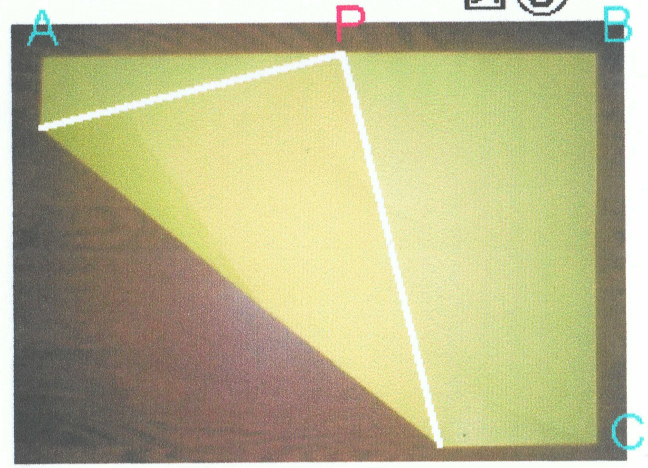
図①



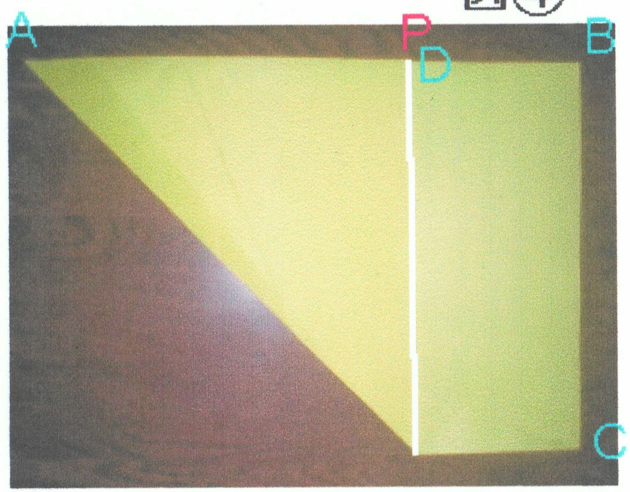
図②



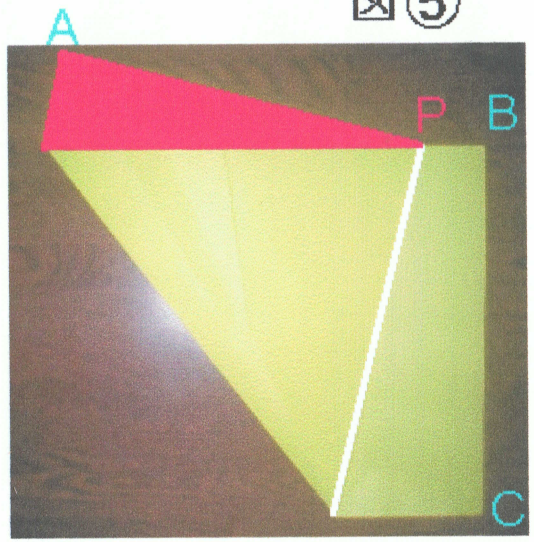
図③



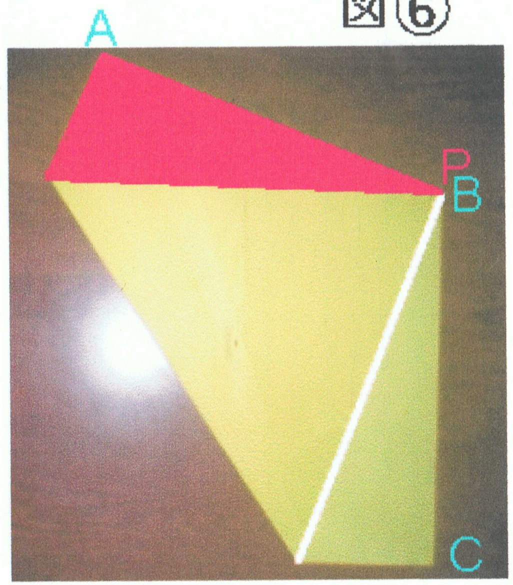
図④



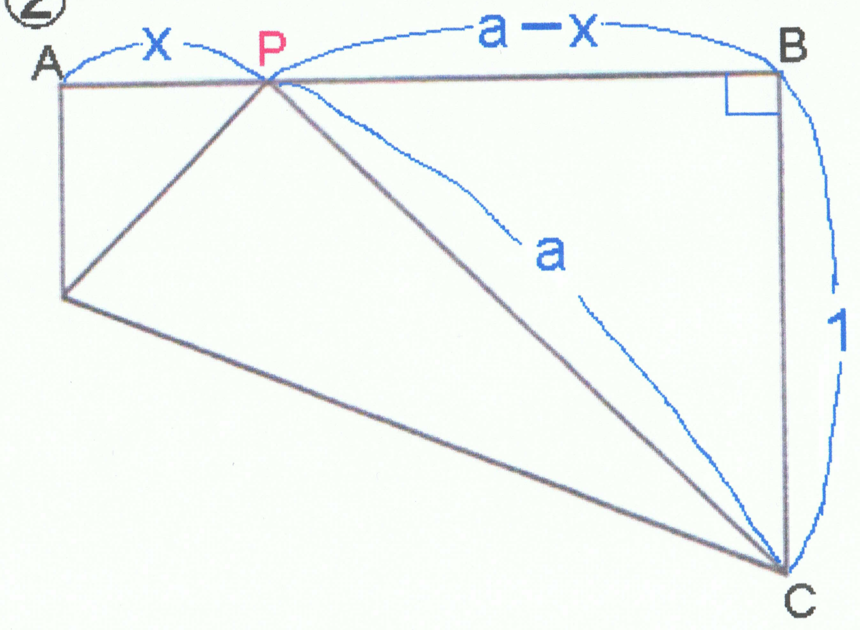
図⑤



図⑥



図②



直角三角形PBCより

$(a-x)^2+1^2=a^2$

$a^2-2ax+x^2+1=a^2$

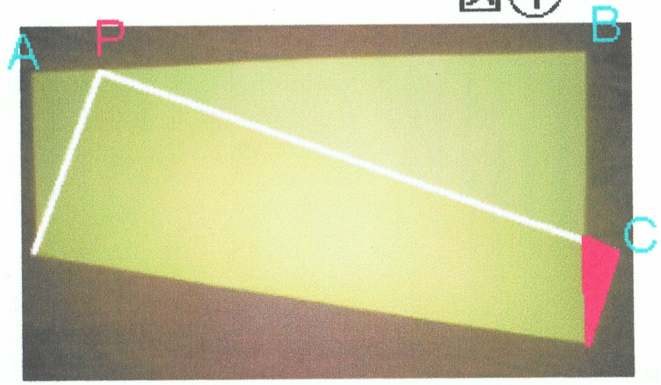
$x^2-2ax+1=0$

$x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$0<x<a$ だから

$x=a-\sqrt{a^2-1}$

図①



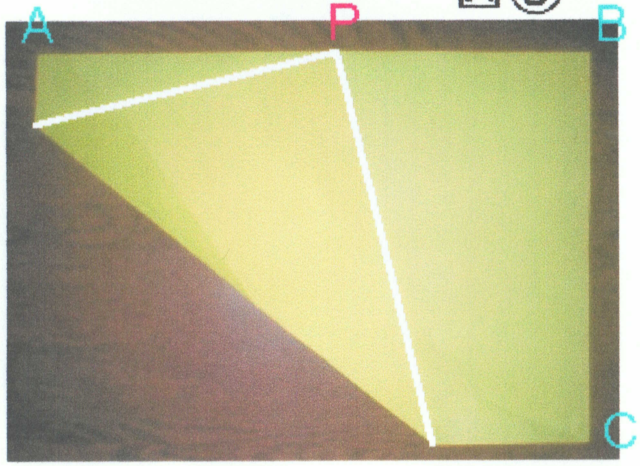
（ア）図①のようなはみ出し部分あり

$0<x<a-\sqrt{a^2-1}$

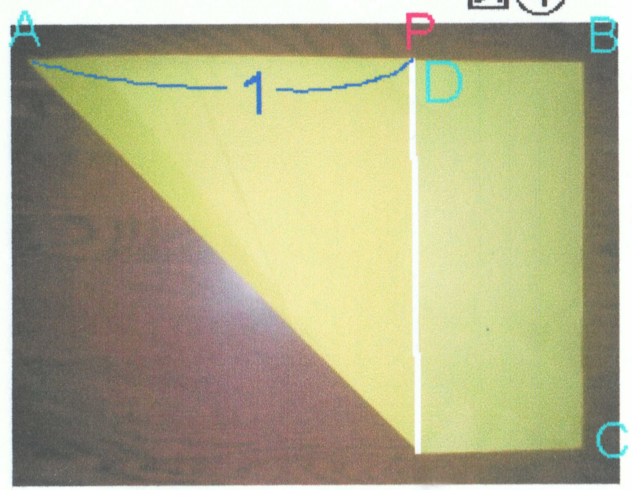
(イ) 図②,図③,図④のようなはみ出し部分なし　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$

図②

図③



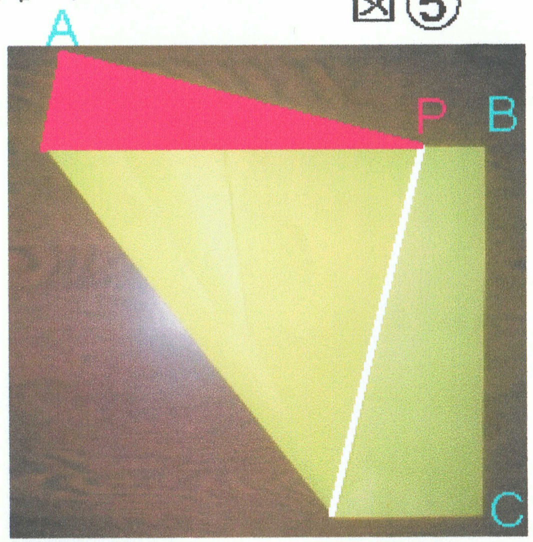
図④



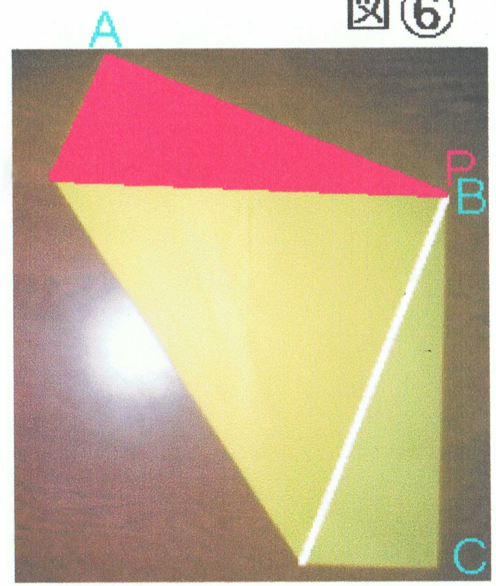
(ウ) 図⑤,図⑥のようなはみ出し部分あり

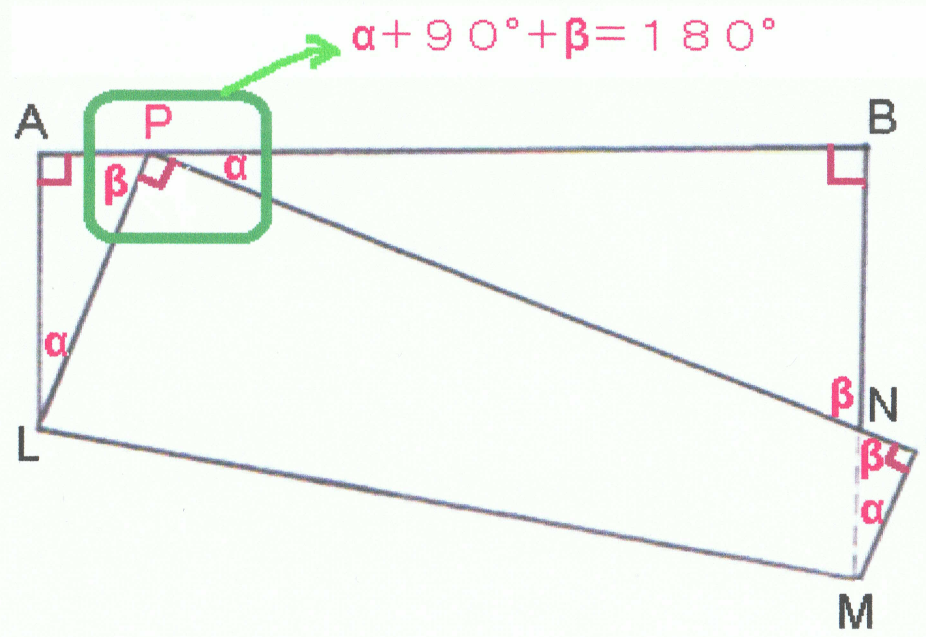
$1 < x \leqq a$

図⑤



図⑥





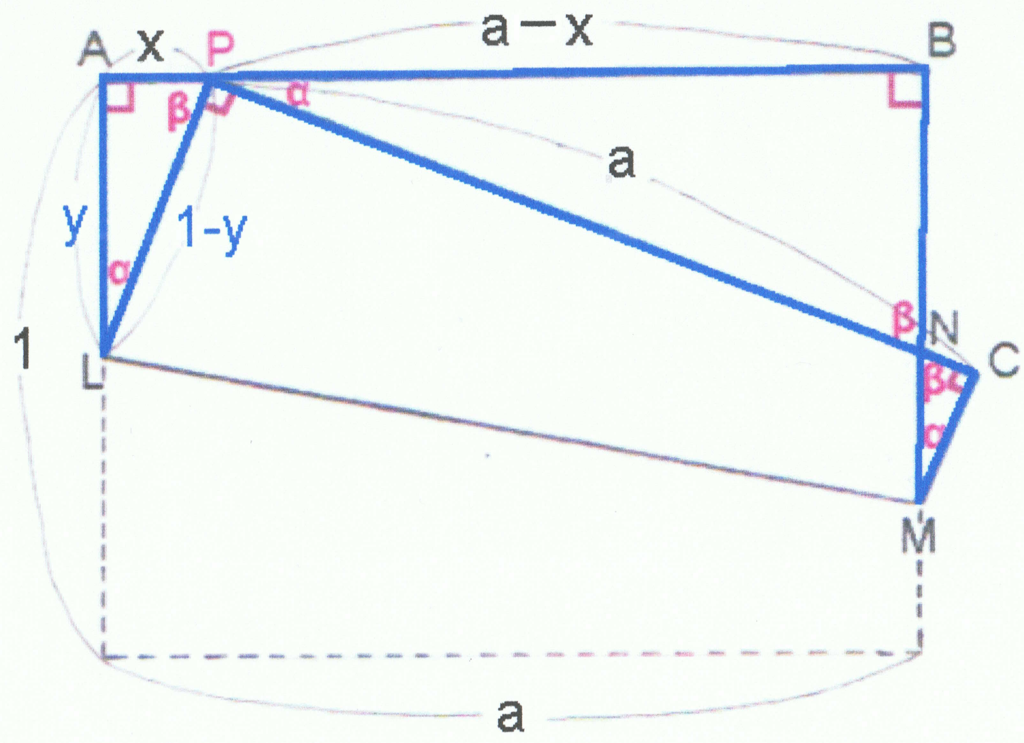
（ア）図①のようなはみ出し部分あり

$0<x<a-\sqrt{a^2-1}$

$\alpha+\beta=90^\circ$

$\triangle ALP \backsim \triangle BPN \backsim \triangle CMN$

$\triangle CMN$の面積$S=\dfrac{1}{2}\times NC\times CM$



△ALPにおいて

AL＝y とおくと、PL＝1−y

$(1-y)^2=x^2+y^2$

$1-2y+y^2=x^2+y^2$

$2y=1-x^2$

$y=\dfrac{1-x^2}{2}$, $1-y=1-\dfrac{1-x^2}{2}=\dfrac{1+x^2}{2}$

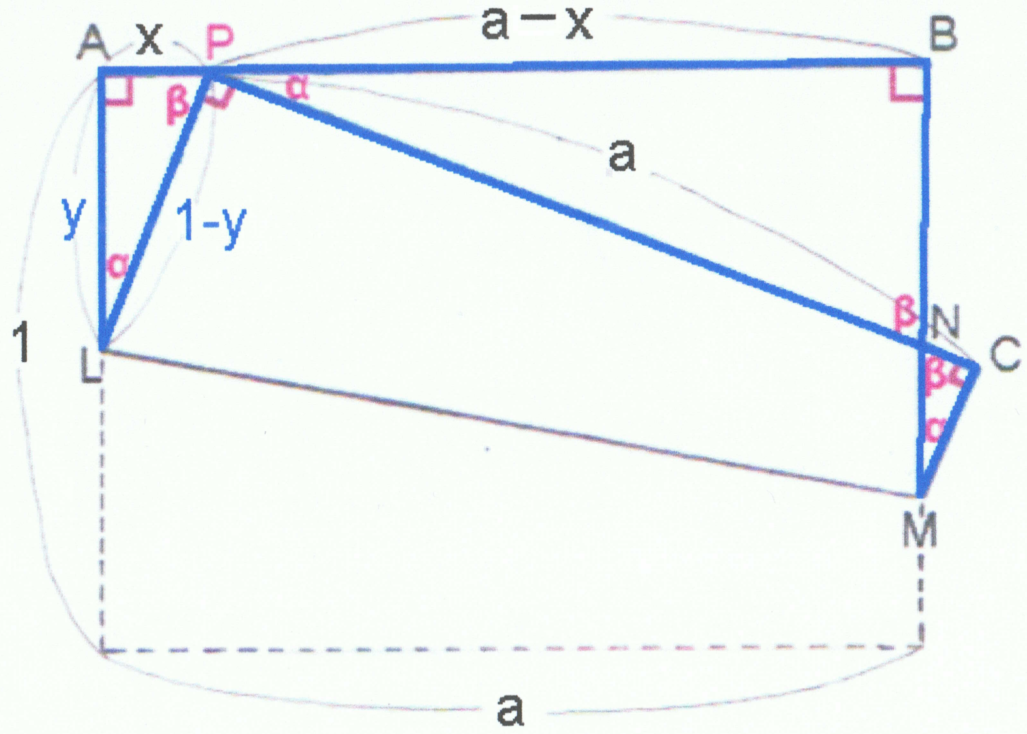
△ALP∽△BPNより

$\dfrac{LP}{AL}=\dfrac{PN}{BP}$ だから

$\dfrac{1-y}{y}=\dfrac{PN}{a-x}$

$$PN=(a-x)\times\frac{1-y}{y}=(a-x)\times\frac{\frac{1+x^2}{2}}{\frac{1-x^2}{2}}=\frac{(a-x)(1+x^2)}{(1-x^2)}$$

$$NC=PC-PN=a-\frac{(a-x)(1+x^2)}{1-x^2}=\frac{a(1-x^2)-(a-x)(1+x^2)}{1-x^2}=\frac{x(x^2-2ax+1)}{1-x^2}$$



$$y=\frac{1-x^2}{2}$$

$$NC=\frac{x(x^2-2ax+1)}{1-x^2}$$

△CMNの面積 $S=\frac{1}{2}\times NC\times \underset{?}{CM}$

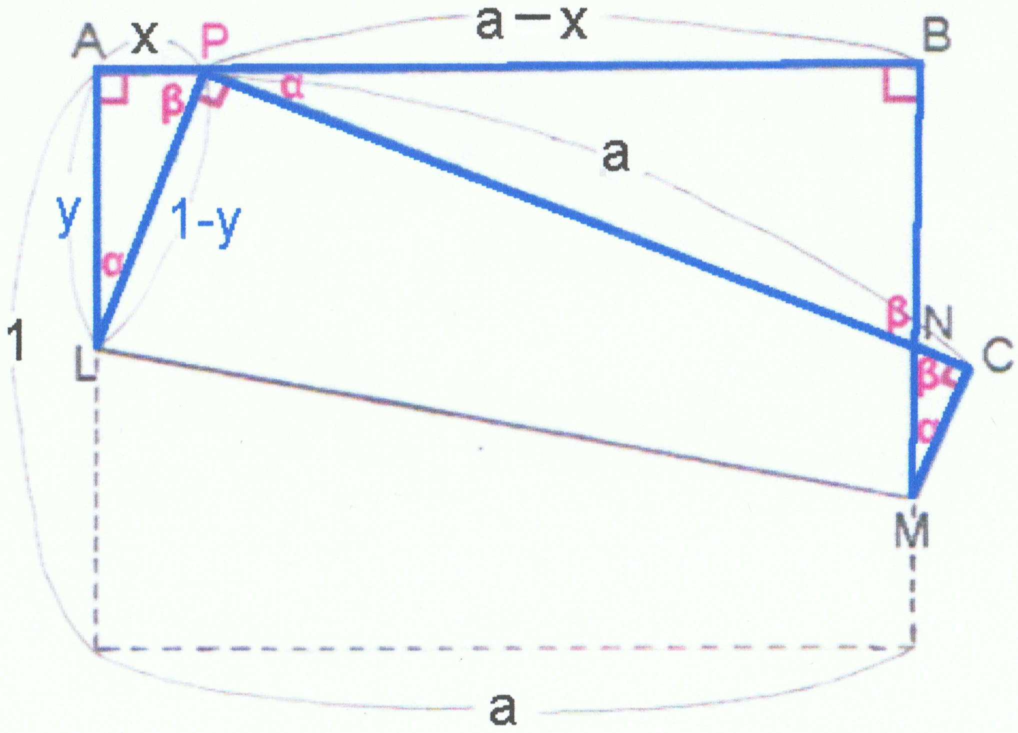
△ALP∽△CMN より

$\frac{AL}{PA}=\frac{CM}{NC}$ だから

$$\frac{y}{x}=\frac{CM}{\frac{x(x^2-2ax+1)}{1-x^2}}$$

$$CM=\frac{y}{x}\times\frac{x(x^2-2ax+1)}{1-x^2}=y\times\frac{(x^2-2ax+1)}{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2}\times\frac{(x^2-2ax+1)}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^2-2ax+1}{2}$$



△CMNの面積 $S=\frac{1}{2}\times NC\times CM$

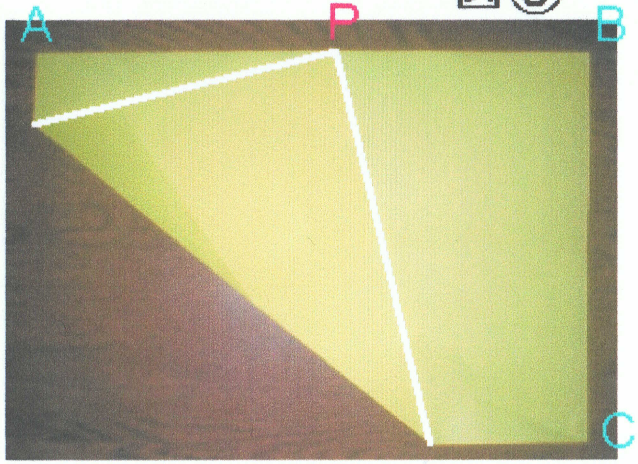
$$=\frac{1}{2}\times\frac{x(x^2-2ax+1)}{1-x^2}\times\frac{x^2-2ax+1}{2}$$

$$=\boxed{\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}}$$

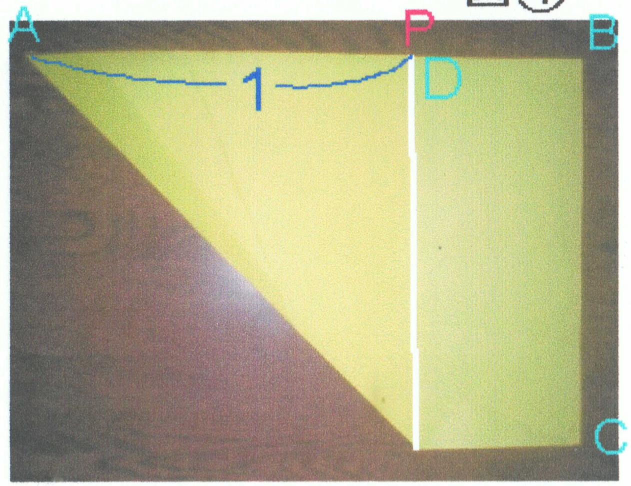
(イ) 図②,図③,図④のようなはみ出し部分なし　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$

図②

図③

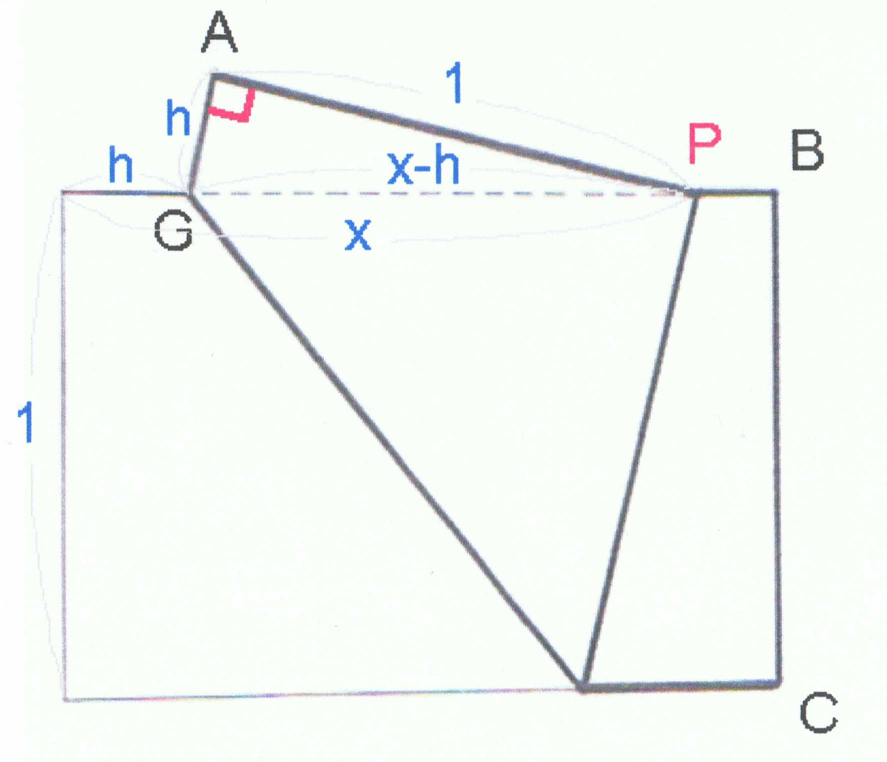


図④



はみ出る部分はないので、 $\boxed{S=0}$

(ウ) 図⑤,図⑥のようなはみ出し部分あり　$1 < x \leqq a$



AG$=h$ とおくと GP $=x-h$

△AGP において

$$h^2+1^2=(x-h)^2$$

$$h^2+1=x^2-2hx+h^2$$

$$2hx=x^2-1$$

$$h=\frac{x^2-1}{2x}$$

△AGP の面積 $S=\frac{1}{2}\times AG\times AP$

$$=\frac{1}{2}\times h\times 1$$

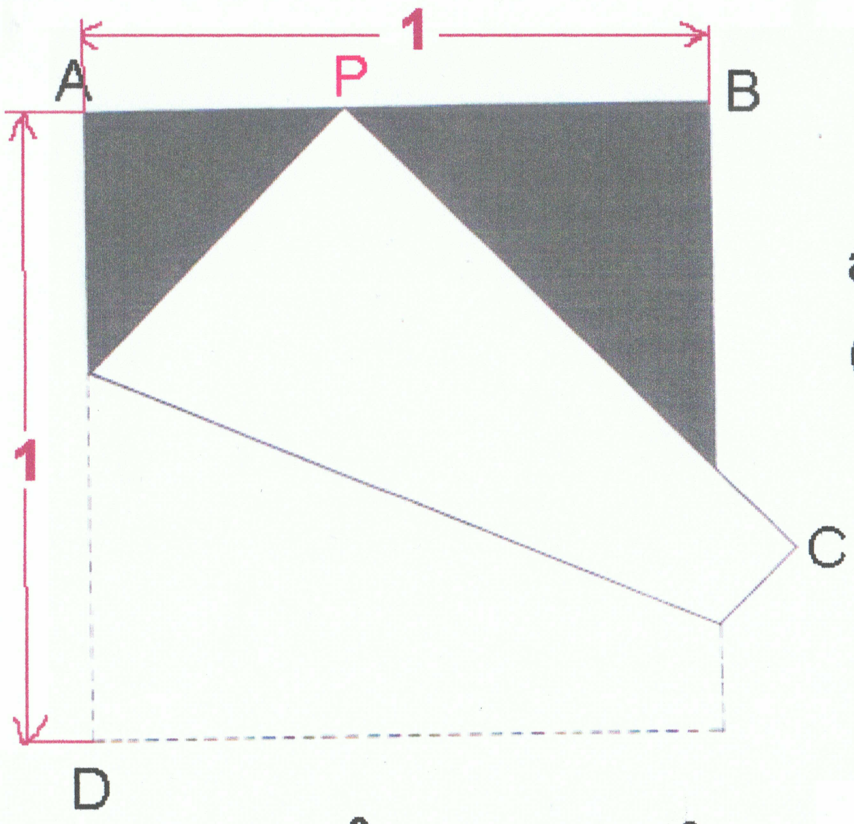
$$=\frac{1}{2}\times\frac{x^2-1}{2x}\times 1$$

$$=\boxed{\frac{x^2-1}{4x}}$$

以上より　はみ出る部分の面積 S は

$0<x<a-\sqrt{a^2-1}$ のとき　　$S=\dfrac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}$

$1<x\leqq a$ のとき　　$S=\dfrac{x^2-1}{4x}$



(2)　$a=1$ とする．P が A から B まで動くとき，

S を最大にするような x の値を求めよ．

$a=1$ の場合　点P がAからBまで移動するとき

(1)の(ア)に該当するから　$0<x<1$ で

$$S=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}$$

$$=\frac{x(1-x)^4}{4(1-x)(1+x)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}$$

$$S'=\frac{\{1\cdot(1-x)^3+x\cdot3(1-x)^2\cdot(-1)\}\cdot4(1+x)-x(1-x)^3\cdot4}{4^2(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2\{(1-x)-3x\}(1+x)-x(1-x)^3}{4(1+x)^2}=\frac{(1-x)^2\{(1-4x)(1+x)-x(1-x)\}}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2(-3x^2-4x+1)}{4(1+x)^2}=\frac{-(1-x)^2(3x^2+4x-1)}{4(1+x)^2}$$

$$S' = \frac{-(1-x)^2(3x^2+4x-1)}{4(1+x)^2}$$

$$= \frac{-3(1-x)^2\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{-2+\sqrt{7}}{3}\right)}{4(1+x)^2}$$

ここで　$0<x<1$ より　$(1-x)^2>0$, $(1+x)^2>0$, $\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)>0$ だから

$S'=0$ となるのは　$x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$ のとき。

するとSの増減表は右図のようになる。

x	0		$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$		1
S'		+	0	−	
S		↗	最大	↘	

したがって　$\underline{x=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}}$ のときSは最大となる。