$\boxed{4}$ (60 点)

n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする．A_n の要素に対し次の条件(＊)を考える．

(＊) 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件(＊)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ とする．A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件(＊)を満たし，その 7 番目の文字は c であった．このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限値 $\lim_{n \to \infty} Q(n)$ を求めよ．

(1)

A_n : a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合

a_n : A_n の要素のうち、cが2つ以上連続して現れない文字列(要素)の個数
条件(*)

これから、条件(*)の文字列の個数 a_n の漸化式を作っていくことにする。

A_{n-1} : a, b, c を重複を許して $n-1$ 個並べてできる文字列すべての集合

a_{n-1} : A_{n-1} の要素のうち、条件(*)の文字列(要素)の個数

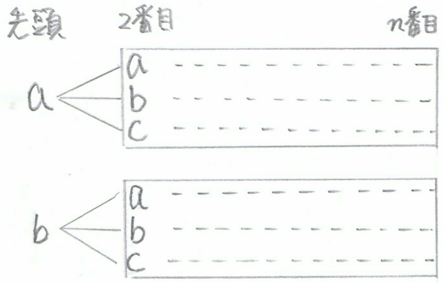
A_{n-2} : a, b, c を重複を許して $n-2$ 個並べてできる文字列すべての集合

a_{n-2} : A_{n-2} の要素のうち、条件(*)の文字列(要素)の個数

としておく。

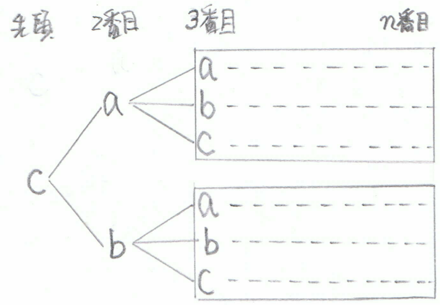
そして、条件(*)の文字列の個数 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} の関係式を見つけ出す。

A_n の要素のうち、条件(*)の文字列を考えると、この文字列の先頭の文字は、a, b, c の3つの場合のどれかになっている。すると、その並び方は次の形となるはず。



2番目以降に、A_{n-1} (a, b, c を重複を許して $n-1$ 個並べてできる文字列すべての集合)のうち、条件(*)の文字列がくれば、先頭から n 番目まで条件(*)の文字列となっている。A_{n-1} の要素のうち、条件(*)の文字列は a_{n-1} 個ある。

b先頭の場合も上と同じ。



3番目以降に、A_{n-2} (a, b, c を重複を許して $n-2$ 個並べてできる文字列すべての集合)のうち、条件(*)の文字列がくれば、先頭から n 番目まで条件(*)の文字列となっている。A_{n-2} の要素のうち、条件(*)の文字列は a_{n-2} 個ある。

bが2番目の場合も上と同じ。

すると、a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列の集合 A_n の要素のうち、条件(*)の文字列の個数 a_n は

先頭がaの場合が a_{n-1} 個, 先頭がbの場合が a_{n-1} 個,
先頭がcで2番目がaの場合が a_{n-2} 個, 先頭がcで2番目がbの場合が a_{n-2} 個

だから

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{-------} ①$$

となる。

それではこれから漸化式①の一般項 a_n を求めてみよう。

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \cdots\cdots ①$$

左辺に移項すると

$$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$

ここで特性方程式をつくると

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$\alpha = 1+\sqrt{3},\ \beta = 1-\sqrt{3}$ とおくと ①は次の2通りに変形できる。

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta(a_{n-1} - \alpha a_{n-2}) \quad \cdots\cdots ②$$

$$a_n - \beta a_{n-1} = \alpha(a_{n-1} - \beta a_{n-2}) \quad \cdots\cdots ③$$

②+③を求めて
$\alpha+\beta = 1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 2$
$\alpha\beta = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = -2$
を代入すると①がでてくる。

②は

$$\overbrace{a_n - \alpha a_{n-1},\ a_{n-1} - \alpha a_{n-2},\ a_{n-2} - \alpha a_{n-3},\ \cdots\cdots,\ a_2 - \alpha a_1}^{\text{項数は } n-1 \text{ 項}}$$

$\times\beta \quad \times\beta \quad \times\beta \quad \times\beta$

初項 $a_2 - \alpha a_1$，公比 β の等比数列 $\{a_n - \alpha a_{n-1}\}$ だから一般項は

$$a_n - \alpha a_{n-1} = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-2} \quad \cdots\cdots ④$$

③は

$$\overbrace{a_n - \beta a_{n-1},\ a_{n-1} - \beta a_{n-2},\ a_{n-2} - \beta a_{n-3},\ \cdots\cdots,\ a_2 - \beta a_1}^{\text{項数は } n-1 \text{ 項}}$$

$\times\alpha \quad \times\alpha \quad \times\alpha \quad \times\alpha$

初項 $a_2 - \beta a_1$，公比 α の等比数列 $\{a_n - \beta a_{n-1}\}$ だから一般項は

$$a_n - \beta a_{n-1} = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

ここで

$$A_1 = \{a, b, c\} \text{ だから } a_1 = 3$$

$$A_2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\} \text{ だから } a_2 = 8$$

A_2 の要素のうち条件(*)の文字列の個数

すると各初項は

$$a_2 - \alpha a_1 = 8 - 3\alpha, \qquad a_2 - \beta a_1 = 8 - 3\beta$$

だから④，⑤は次のような式になる。

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta^{n-2}(8 - 3\alpha) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$a_n - \beta a_{n-1} = \alpha^{n-2}(8 - 3\beta) \quad \cdots\cdots ⑦$$

a_n を求めるので ⑥ $\times\beta$ − ⑦ $\times\alpha$ より

$$\begin{array}{rrl}
 & \beta a_n - \alpha\beta a_{n-1} &= \beta^{n-1}(8-3\alpha) \\
-) & \alpha a_n - \alpha\beta a_{n-1} &= \alpha^{n-1}(8-3\beta) \\
\hline
 & (\beta - \alpha)a_n &= \beta^{n-1}(8-3\alpha) - \alpha^{n-1}(8-3\beta)
\end{array}$$

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}\left\{\beta^{n-1}(8-3\alpha) - \alpha^{n-1}(8-3\beta)\right\} \quad \cdots\cdots ⑧$$

ここで

$$\beta - \alpha = 1 - \sqrt{3} - (1+\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

$$8 - 3\alpha = 8 - 3(1+\sqrt{3}) = 5 - 3\sqrt{3}$$

$$8 - 3\beta = 8 - 3(1-\sqrt{3}) = 5 + 3\sqrt{3}$$

すると ⑦は次のようになる。

$$a_n = \frac{1}{-2\sqrt{3}}\left\{(1-\sqrt{3})^{n-1}(5-3\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})^{n-1}(5+3\sqrt{3})\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{(1+\sqrt{3})^{n-1}(5+3\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})^{n-1}(5-3\sqrt{3})\right\}$$

そして A_nの要素の個数は 3^n であるから

$$P(n) = \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\left\{(1+\sqrt{3})^{n-1}(5+3\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})^{n-1}(5-3\sqrt{3})\right\}$$

(2) A_nの要素で 条件(*)を満たし、7番目が c である文字列は 次のように考えられる。

先頭 〜 5番目	6番目	7番目	8番目	9番目 〜 n番目
A_5の要素のうち条件(*)の文字列(要素)	a または b	c	a または b	A_{n-8}の要素のうち条件(*)の文字列(要素)
a_5個				a_{n-8}個

このような文字列は $a_5\times2\times1\times2\times a_{n-8}$ 個ある。

このとき、10番目の文字が c である文字列は 次のように考えられる。

先頭 〜 5番目	6番目	7番目	8番目	9番目	10番目	11番目	12番目 〜 n番目
A_5の要素のうち条件(*)の文字列(要素)	a または b	c	a または b	a または b	c	a または b	A_{n-11}の要素のうち条件(*)の文字列(要素)
a_5個							a_{n-11}個

このような文字列は $a_5\times2\times1\times2\times2\times1\times2\times a_{n-11}$ 個ある。

すると $Q(n)$ は

$$Q(n)=\frac{\text{条件(*)を満たし7番目と10番目がcの確率}}{\text{条件(*)を満たし7番目がcの確率}}$$

条件つき確率

$$=\frac{\dfrac{2^4\times a_5\times a_{n-11}}{3^n}}{\dfrac{2^2\times a_5\times a_{n-8}}{3^n}}=\frac{4\times a_{n-11}}{a_{n-8}}$$

ここで (1)の⑧より

$$Q(n)=\frac{4\times a_{n-11}}{a_{n-8}}=\frac{\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left\{\beta^{n-12}(8-3\alpha)-\alpha^{n-12}(8-3\beta)\right\}}{\dfrac{1}{\beta-\alpha}\left\{\beta^{n-9}(8-3\alpha)-\alpha^{n-9}(8-3\beta)\right\}}$$

分母,分子を α^{n-9} で割る

$$=\frac{4\left\{\dfrac{\beta^{n-12}}{\alpha^{n-9}}(8-3\alpha)-\dfrac{\alpha^{n-12}}{\alpha^{n-9}}(8-3\beta)\right\}}{\dfrac{\beta^{n-9}}{\alpha^{n-9}}(8-3\alpha)-\dfrac{\alpha^{n-9}}{\alpha^{n-9}}(8-3\beta)}$$

$$=\frac{4\left\{\beta^{-3}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}(8-3\alpha)-\alpha^{-3}(8-3\beta)\right\}}{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}(8-3\alpha)-(8-3\beta)}$$

ここで $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt3}{1+\sqrt3}=\dfrac{(1-\sqrt3)^2}{(1+\sqrt3)(1-\sqrt3)}=\dfrac{1-2\sqrt3+3}{1-3}=\dfrac{4-2\sqrt3}{-2}=\sqrt3-2$ だから

$0<\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$ となり、

$n\to\infty$のとき $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}\to0$

$$\lim_{n\to\infty}Q(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\left\{\beta^{-3}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}(8-3\alpha)-\alpha^{-3}(8-3\beta)\right\}}{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-9}(8-3\alpha)-(8-3\alpha)}=\frac{4\times\left\{-\alpha^{-3}(8-3\beta)\right\}}{-(8-3\beta)}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4\times\{-\alpha^{-3}(8-3\beta)\}}{-(8-3\beta)}$$

$$= 4\times\alpha^{-3}$$

$$= \frac{4}{\alpha^3}$$

$$= \frac{4}{(1+\sqrt{3})^3}$$

$$= \frac{4}{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{10+6\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{5+3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2(5-3\sqrt{3})}{(5+3\sqrt{3})(5-3\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2(5-3\sqrt{3})}{25-27}$$

$$= 3\sqrt{3}-5$$