$\boxed{5}$ (60 点)

実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$, $f(x)=x^2+cx+1$ とおく．また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1，-1 を除いたものを T とする．

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ．

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，

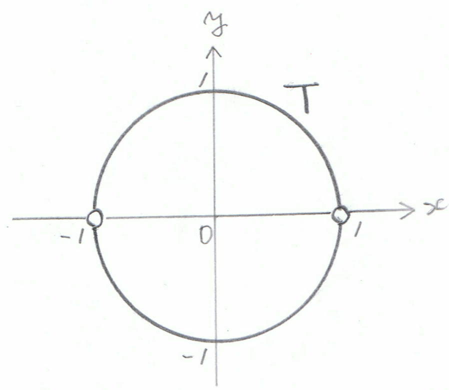
$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$$

を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ．

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

(1) $f(x)=0$ より

$x^2+cx+1=0$ ----①



この2次方程式の解がすべてT上にあるためには

㋐ 異なる2つの虚数解を持ち

かつ

㋑ その虚数解の絶対値が1

となっていなければならない。

そこで、2次方程式が2つの虚数解を持つとき、それらは互いに共役な複素数であるから

2次方程式①の異なる2つの虚数解を $z, \bar{z}$ とおくことができる。

①に解と係数の関係を使うと

$z\bar{z} = \frac{1}{1} = 1$

ここで　$z\bar{z} = |z|^2$,　$z\bar{z} = |\bar{z}|^2$　より

$|z|^2=1$, $|\bar{z}|^2=1$

つまり　$|z| = |\bar{z}| = 1$

$z=a+bi$ のとき $\bar{z}=a-bi$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2-b^2i^2$

$=a^2+b^2$

となるので、2次方程式①の虚数解は2つとも絶対値が1となっているので

㋑を満たしているのがわかる。

そこであとは㋐を満たせばよいだけだから

判別式 <0 より

$c^2-4<0$

$(c+2)(c-2)<0$

$\therefore\ -2<c<2$

これが求める条件となる。

(2) $F(x)=0$ より

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \quad \text{------②}$$

この4次方程式の解がすべてT上にあるというのだから、

4つの解がすべて虚数で、かつその絶対値が1となっている。

係数が実数の高次方程式が虚数解を持つとき、その共役複素数も必ずその方程式の解になっているので

②の解を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ とおくことができる。

そして解がすべてT上にあるから $|\alpha|=|\bar{\alpha}|=|\beta|=|\bar{\beta}|=1$ となっている。

すると②は

$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})(x-\beta)(x-\bar{\beta})=0$ と表せる。

これを変形すると

$$\{(x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}\}\{x-(\beta+\bar{\beta})x+\beta\bar{\beta}\}=0$$

ここで $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1$, $\beta\bar{\beta}=|\beta|^2=1$ となり

また、$\alpha+\bar{\alpha}$, $\beta+\bar{\beta}$ はともに実数だから

$\alpha+\bar{\alpha}=-c_1$, $\beta+\bar{\beta}=-c_2$ とおくと

$$\{x^2-(-c_1)x+1\}\{x^2-(-c_2)x+1\}=0$$

$(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)=0$ と表せる。

$\alpha=a+bi$ のとき
$\bar{\alpha}=a-bi$
$\alpha+\bar{\alpha}$
$=a+bi+a-bi$
$=2a$ (実数)

つまり $F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす c_1, c_2 が存在するといえる。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるためには、

(2)より $F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せて、

しかも (1)より $-2<c_1<2$, $-2<c_2<2$ でなくてはならない。

そこで

$$
\begin{aligned}
F(x)&=x^4+ax^3+bx^2+ax+1\\
&=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\\
&=x^4+c_2x^3+x^2+c_1x^3+c_1c_2x^2+c_1x+x^2+c_2x+1\\
&=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1
\end{aligned}
$$

係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2=a \\ c_1c_2+2=b \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} c_1+c_2=a \\ c_1c_2=b-2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{2数の和を}p\text{, 積を}q\text{とすると、その2数は2次方程式 } x^2-px+q=0 \text{ の解である。}}$

すると この c_1, c_2 は 2次方程式 $t^2-at+(b-2)=0$ の

2つの解となることがわかる。

そしてこれから この2つの解が $-2<t<2$ の範囲にあるための

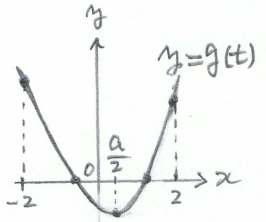
条件を見つけていく。

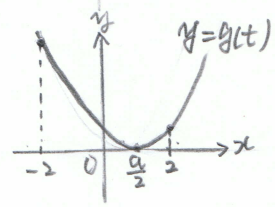
$g(t)=t^2-at+b-2$ とおくと $g(t)=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b-2$ と変形できる。

2つの解が $-2<t<2$ の範囲にあるためには

$y=g(t)$ のグラフが右図のようになっていなければならない。

つまり 次の式が求める条件となる。





$$\begin{cases} -2<\frac{a}{2}<2 \\ -\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0 \\ g(-2)>0 \\ g(2)>0 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} -4<a<4 \\ b\leqq \frac{a^2}{4}+2 \\ b>-2a-2 \\ b>2a-2 \end{cases}$$

点(a, b)の範囲を図示すると下図の斜線部となる。

境界は放物線 $b=\frac{a^2}{4}+2$ 上の $-4<a<4$ の部分のみ含む。