1

a, b, c を実数とし，3つの2次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2 + bx + 2 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$x^2 + cx + 3 = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

の解を複素数平面上で考察する.

(1) 2つの方程式①，②がいずれも実数解を持たないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ．また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a, b を用いて表せ.

(2) 3つの方程式①，②，③がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ.

(1) $x^2+ax+1=0$ ----①

$x^2+bx+2=0$ ----②

①より $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}=-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}$

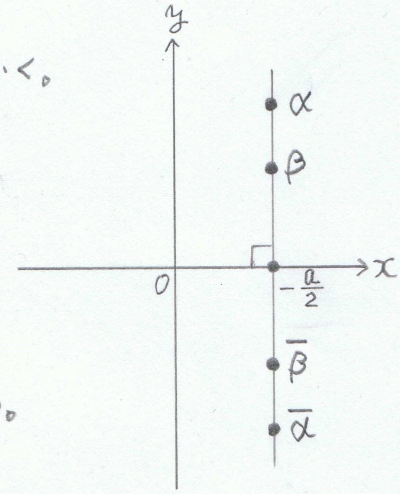
実数解を持たないから $a^2-4<0$ ----④

そこで $\alpha=-\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$, $\overline{\alpha}=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$ とおく。

②より $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}=-\dfrac{b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-8}}{2}$

実数解を持たないから $b^2-8<0$ ----⑤

そこで $\beta=-\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{8-b^2}}{2}i$, $\overline{\beta}=-\dfrac{b}{2}-\dfrac{\sqrt{8-b^2}}{2}i$ とおく。



すると $\alpha,\overline{\alpha}$ の実部は $-\dfrac{a}{2}$, $\beta,\overline{\beta}$ の実部は $-\dfrac{b}{2}$ だから

$a=b$ のとき $\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta}$ の実部は等しくなるから

複素数平面上のこれらの4点は

点 $-\dfrac{a}{2}$ を通り，虚軸に平行な直線上にある。

次に

$a\neq b$ のときを考える。

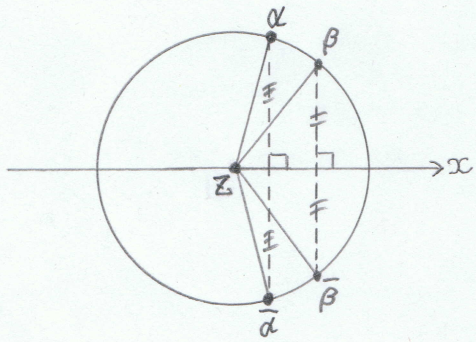
4点 $\alpha,\overline{\alpha},\beta,\overline{\beta}$ が同一円周上にあるならその円の中心となる点が存在するはずである。そして2点 $\alpha,\overline{\alpha}$ は実軸対称だから，この2点から等しい距離は実軸上である。

そこで，実軸上の点を z としたとき

$|\alpha-z|=|\beta-z|=|\overline{\alpha}-z|=|\overline{\beta}-z|$

となる z が存在するかどうかを調べてみる。

ここで 点 α と点 $\overline{\alpha}$，点 β と点 $\overline{\beta}$ は実軸対称であるから，$|\alpha-z|=|\beta-z|$ となる z が存在するかどうか調べればよい。



$|\alpha - z|^2 = (\alpha - z)(\overline{\alpha - z}) = (\alpha - z)(\overline{\alpha} - \overline{z}) = (\alpha - z)(\overline{\alpha} - z)$

$= \alpha\overline{\alpha} - (\alpha + \overline{\alpha})z + z^2$

zが実数

$\Updownarrow$

$\overline{z} = z$

ここで 解と係数の関係を使うと

①から　$\alpha + \overline{\alpha} = -\frac{a}{1} = -a$,　$\alpha\overline{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$

だから　$|\alpha - z|^2 = 1 + az + z^2$　---- ⑥

$|\beta - z|^2 = (\beta - z)(\overline{\beta - z}) = (\beta - z)(\overline{\beta} - \overline{z}) = (\beta - z)(\overline{\beta} - z)$

$= \beta\overline{\beta} - (\beta + \overline{\beta})z + z^2$

ここで 解と係数の関係を使うと

②から　$\beta + \overline{\beta} = -\frac{b}{1} = -b$,　$\beta\overline{\beta} = \frac{2}{1} = 2$

だから　$|\beta - z|^2 = 2 + bz + z^2$　---- ⑦

そこで $|\alpha - z| = |\beta - z|$ となる z が存在するかどうかを調べる。

⑥, ⑦より　$|\alpha - z|^2 = |\beta - z|^2$ とおいてみる。

$|\alpha - z| = |\beta - z|$

$\Updownarrow$

$|\alpha - z|^2 = |\beta - z|^2$

$1 + az + z^2 = 2 + bz + z^2$

$az - bz = 2 - 1$

$(a - b)z = 1$

$a \neq b$ のとき　$z = \frac{1}{a-b}$

よって、このとき $|\alpha - z| = |\beta - z|$ となる z が存在する。

したがって、このとき $|\alpha - z| = |\beta - z| = |\overline{\alpha} - z| = |\overline{\beta} - z|$ となる z が存在する.

すなわち 4点 α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ が点zを中心とする円周上にあることがわかった。

この円の中心は　$\frac{1}{a-b}$

また、　$|\alpha - z|^2 = 1 + az + z^2 = 1 + \frac{a}{a-b} + \left(\frac{1}{a-b}\right)^2$

$= \frac{(a-b)^2 + a(a-b) + 1}{(a-b)^2}$

$= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - ab + 1}{(a-b)^2}$

$= \frac{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}{(a-b)^2}$

よって 半径は　$\frac{\sqrt{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}}{|a-b|}$

(2) $x^2+cx+3=0$ ----③

$$x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-12}}{2}=-\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-12}}{2}$$

実数解を持たないから $c^2-12<0$ ----⑧

そこで $\gamma=-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{12-c^2}}{2}i$, $\bar{\gamma}=-\frac{c}{2}-\frac{\sqrt{12-c^2}}{2}i$ とおく。

点γと点$\bar{\gamma}$は実軸対称となっているので、これらの点が(1)の円周上に存在するためには、$|\alpha-z|=|\gamma-z|$となるzが存在すればよい。

$$|\gamma-z|^2=(\gamma-z)(\overline{\gamma-z})=(\gamma-z)(\bar{\gamma}-\bar{z})=(\gamma-z)(\bar{\gamma}-z)$$
$$=\gamma\bar{\gamma}-(\gamma+\bar{\gamma})z+z^2$$

ここで解と係数の関係を使うと

③から $\gamma+\bar{\gamma}=-\frac{c}{1}=-c$, $\gamma\bar{\gamma}=\frac{3}{1}=3$

だから $|\gamma-z|^2=3+cz+z^2$ ----⑨

ここで $|\alpha-z|=|\gamma-z|$ となるzが存在するかどうかを調べる。

⑥, ⑨より $|\alpha-z|^2=|\gamma-z|^2$ とおいてみる。

$$1+az+z^2=3+cz+z^2$$
$$az-cz=3-1$$
$$(a-c)z=2$$

$a\neq c$ のとき $z=\frac{2}{a-c}$ -----⑩

よってこのとき $|\alpha-z|=|\gamma-z|$ となるzが存在する。

つまり $|\alpha-z|=|\gamma-z|=|\bar{\alpha}-z|=|\bar{\gamma}-z|$ となるzが存在する。

すなわち4点α, $\bar{\alpha}$, γ, $\bar{\gamma}$は点zを中心とする円周上にあることがわかった。

そして、6点α, $\bar{\alpha}$, β, $\bar{\beta}$, γ, $\bar{\gamma}$が全て同一円周上にあるためには、

$|\alpha-z|=|\beta-z|$ かつ $|\alpha-z|=|\gamma-z|$ となるzが存在しなければならない。

そこで(1)の結果より

$a\neq b$ のとき $z=\frac{1}{a-b}$ となっているので、これと⑩とから

このとき $\frac{1}{a-b}=\frac{2}{a-c}$ でなければならないことがわかる。

整頓すると
$$2(a-b)=a-c$$
$$2a-2b=a-c$$
$$\therefore\ a+c=2b\ \text{----⑪}$$

したがって、求める条件は

④, ⑤, ⑧, ⑪ より

$a^2-4<0$, $b^2-8<0$, $c^2-12<0$, $a \neq b$, $a \neq c$, $a+c=2b$

である。

$a+c=2b$ のとき

$b=\dfrac{a+c}{2}$ と表せるから

$a \neq b$ ならば

$a \neq c$ も $b \neq c$ も成立つ

ので、

もし、これに気付いたなら

$a \neq b$ だけ書いておけば

よい。