$\boxed{2}$

次の問に答えよ.

(1) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を一組求めよ.

(2) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で $x^2 + y^2$ の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ.

(1)

$35x+91y+65z=3$ ----①

$35x+65z=3-91y$

$5(7x+13z)=3-91y$

yにいろいろな整数を入れて
3-91yが5の倍数となるものをさがす。

このとき $y=-2$ とすると $3-91y=3-91\times(-2)=3+182=185=5\times37$

すると $7x+13z=37$ となるので、これを満たす x, z をさがすと

$x=-4,\ z=5$ となる。

x, zにいろいろな整数
を入れて、さがす。

よって $(x, y, z)=(-4, -2, 5)$

(2)

この(2)の作業は、x, y, zを他の文字ここではl, mを使って表す作業をしただけ。

①に $(x, y, z)=(-4, -2, 5)$ を代入した式を作ると

$35\cdot(-4)+91\cdot(-2)+65\cdot5=3$ ----②

①－②を作って、右辺を消去してみると

$$
\begin{array}{rl}
 & 35x+91y+65z=3 \\
-) & 35\cdot(-4)+91\cdot(-2)+65\cdot5=3 \\
\hline
 & 35(x+4)+91(y+2)+65(z-5)=0
\end{array}
$$

これを(1)と同じように変形すると

$35(x+4)+65(z-5)=-91(y+2)$

$5\{7(x+4)+13(z-5)\}=-91(y+2)$

y^2の最小値がほしいから、
yのある項を取り出した。

ここで 5と－91は互いに素だから、左辺と右辺が等しくなるのは、$y+2$が5の倍数のときである。

そこで $y+2=5l$ （lは整数）とおいてみる。このとき $y=5l-2$ である。

すると

$5\{7(x+4)+13(z-5)\}=-91\cdot5l$

$7(x+4)+13(z-5)=-91l$ となる。

x^2の最小値がほしいから、
xのある項を取り出した。

ここでさらに変形していくと

$7(x+4)=-91l-13(z-5)$

$7(x+4)=13(-7l-z+5)$

ここで 7と13は互いに素だから、左辺と右辺が等しくなるのは $x+4$が13の倍数のときである。

そこで $x+4=13m$ （mは整数）とおいてみる。このとき $x=13m-4$ である。

すると

$7\cdot13m=13(-7l-z+5)$

$7m=-7l-z+5$

このとき $z=-7l-7m+5$ となる。

x, y, zを
lとmを使って
表した。

したがって

$(x, y, z)=(13m-4,\ 5l-2,\ -7l-7m+5)$

x, y, z が、整数 l, m を使って

$$(x, y, z) = (13m-4,\ 5l-2,\ -7l-7m+5)$$

と表された。

すると

$$x^2+y^2 = (13m-4)^2+(5l-2)^2$$

だから

この x^2+y^2 が最小となるのは $m=0,\ l=0$ のときである。

つまり

$(x, y, z) = (-4, -2, 5)$ のとき x^2+y^2 は最小となり

最小値は $x^2+y^2 = (-4)^2+(-2)^2 = 20$ となる。