$\boxed{3}$

方程式

$$e^x(1-\sin x)=1$$

について，次の問に答えよ．

(1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ．また，正の実数解を無限個持つことを示せ．

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて a_1，a_2，a_3，$\cdots$ とし，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$ を求めよ．

(1) 方程式 $e^x(1-\sin x)=1$ の実数解は

$f(x)=e^x(1-\sin x)-1$ とおいたとき、$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。

そこで、関数 $f(x)$ の増減表を作って、考えていく。

$$f(x)=e^x(1-\sin x)-1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(1-\sin x)+e^x(-\cos x) \\ &= e^x(1-\sin x-\cos x) \\ &= e^x\{1-(\sin x+\cos x)\} \\ &= e^x\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \sqrt{2}e^x\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\} \end{aligned}$$

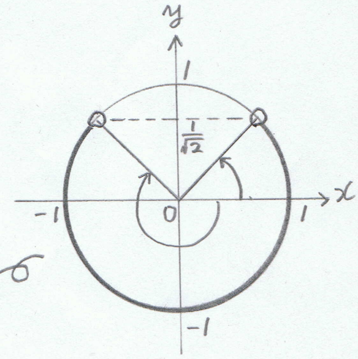
$e^x>0$ は明らか

$f'(x)=0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

n を整数として $x+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{\pi}{4},\ 2n\pi+\frac{3}{4}\pi$

$$\therefore\ x=2n\pi,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

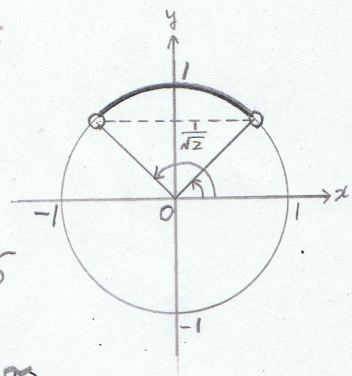


$f'(x)>0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2n\pi-\frac{5}{4}\pi<x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ 2n\pi-\frac{3}{2}\pi<x<2n\pi$$



$f'(x)<0$ のとき $\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore\ 2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$$

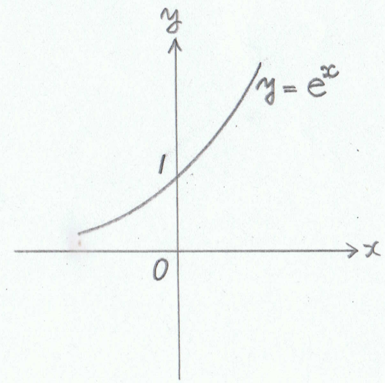
よって、$f(x)$ の増減表は次のようになる。

				$n=-1$のとき				$n=0$のとき				$n=1$のとき				$n=2$のとき						nのとき		
x	---	$-\frac{7}{2}\pi$		-2π		$-\frac{3}{2}\pi$		0		$\frac{\pi}{2}$		2π		$\frac{5}{2}\pi$		4π		$\frac{9}{2}\pi$	----	$2n\pi-\frac{3}{2}\pi$		$2n\pi$		$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	----
$f'(x)$	---	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	----	0	+	0	−	0	----
$f(x)$	---	−1	↗	負	↘	−1	↗	0	↘	−1	↗	正	↘	−1	↗	正	↘	−1	----	−1	↗	正	↘	−1	----

$$f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=e^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}-1=e^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(1-1)-1=-1$$

$$f(0)=e^0(1-\sin 0)-1=1(1-0)-1=0$$

$$f(2n\pi)=e^{2n\pi}(1-\sin 2n\pi)-1=e^{2n\pi}(1-0)-1=e^{2n\pi}-1$$



ここで $n>0$ のとき $2n\pi>0$ だから $e^{2n\pi}>1$ よって $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1>0$

$n<0$ のとき $2n\pi<0$ だから $e^{2n\pi}<1$ よって $f(2n\pi)=e^{2n\pi}-1<0$

すると

$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ で 極小値 -1

$x=2n\pi$ で 極大値 $\begin{cases} 正 & (n>0 のとき) \\ 0 & (n=0 のとき) \\ 負 & (n<0 のとき) \end{cases}$

をとる。

したがって $x<0$ のとき $y=f(x)$ のグラフは 極小値が常に -1, 極大値が常に負であるから x軸と共有点を持たないから 方程式 $f(x)=0$ つまり $e^x(1-\sin x)=1$ は負の実数解を持たない。

$x=0$ のとき $f(0)=0$ となり 方程式 $f(x)=0$ つまり $e^x(1-\sin x)=1$ は実数解 $x=0$ を持つ。

$x>0$ のとき $y=f(x)$ のグラフは 極小値が常に -1, 極大値が常に正であるから x軸と無限回交わるので 方程式 $f(x)=0$ つまり $e^x(1-\sin x)=1$ は正の実数解を無限個持つ。

(2) の方針

正の実数解を小さい方から順に並べてみる。　kを自然数とする。

$$\frac{\pi}{2} < a_1 < 2\pi < a_2 < \frac{5}{2}\pi < a_3 < 4\pi < a_4 < \frac{9}{2}\pi < \cdots\cdots < 2k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} < 2k\pi < a_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \cdots\cdots$$

すると　奇数番目の実数解の範囲は　$2k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} < 2k\pi$

偶数番目の実数解の範囲は　$2k\pi < a_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

となっている。

そして、この(2)の問題は、これらの不等式を使って、実数解の和を使った極限を求めていくと考えられるので

はさみうちの原理　$\lim_{n\to\infty} \boxed{} < \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} < \lim_{n\to\infty} \boxed{}$

を利用するのだろうと思われる。

そこで、奇数番目の実数解だけの和を使った極限や、偶数番目の実数解だけの和を使った極限を求めていくのでなく

これらをいっしょに合わせて　$a_{2k-1} + a_{2k}$　として

$$S_n = \sum_{k=1}^{\ell} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2\ell-1} + a_{2\ell}) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2\ell-1} + a_{2\ell}$$

のような和を作って、それを使った極限を考える方が筋が通った方法である。

ところが、上の和S_nの式は、偶数番目までの和を表す式である。偶数番目までの和を使った極限と

奇数番目までの和を使った極限は異なるかもしれない。

そこで奇数番目までの和を表す式も必要になる。

これは　$\sum_{k=1}^{\ell} (a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{2\ell} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{2\ell-1}$　と表せるはずだ。

(2) 正の実数解を小さい方から順に並べてみると、kを自然数として

$$\frac{\pi}{2} < a_1 < 2\pi < a_2 < \frac{5}{2}\pi < a_3 < 4\pi < a_4 < \cdots < 2k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} < 2k\pi < a_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \cdots$$

つまり　$2k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} < 2k\pi < a_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

不等式の性質

$a < x < b$
$c < y < d$
ならば
$a + c < x + y < b + d$

そこで　$2k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} < 2k\pi$ ----①

$2k\pi < a_{2k} < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ----②

①, ②より　$2k\pi - \frac{3}{2}\pi + 2k\pi < a_{2k-1} + a_{2k} < 2k\pi + 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$4k\pi - \frac{3}{2}\pi < a_{2k-1} + a_{2k} < 4k\pi + \frac{\pi}{2}$ ----③

ここで　nが偶数のとき　$n = 2l$（lは自然数）とおくと

$$S_n = S_{2l} = \sum_{k=1}^{l} (a_{2k-1} + a_{2k})$$　と表せるから

③より　$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi - \frac{3}{2}\pi\right) < S_{2l} < \sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$ ----④

ここで　$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi - \frac{3}{2}\pi\right) = 4\pi\sum_{k=1}^{l} k - \sum_{k=1}^{l}\frac{3}{2}\pi = 4\pi \times \frac{l(l+1)}{2} - \frac{3}{2}\pi \times l$$

$$= \frac{4l^2 + 4l - 3l}{2}\pi = \frac{4l^2 + l}{2}\pi$$

$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi\sum_{k=1}^{l} k + \sum_{k=1}^{l}\frac{\pi}{2} = 4\pi \times \frac{l(l+1)}{2} + \frac{\pi}{2} \times l$$

$$= \frac{4l^2 + 4l + l}{2}\pi = \frac{4l^2 + 5l}{2}\pi$$

だから　$$\frac{4l^2 + l}{2}\pi < S_{2l} < \frac{4l^2 + 5l}{2}\pi$$

ここで　$\frac{S_n}{n^2} = \frac{S_{2l}}{(2l)^2}$　と表せるから

$$\frac{4l^2 + l}{2(2l)^2}\pi < \frac{S_{2l}}{(2l)^2} < \frac{4l^2 + 5l}{2(2l)^2}\pi$$

$n = 2l$ で　$n \to \infty$ のとき $l \to \infty$ であるから

$$\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2 + l}{2(2l)^2}\pi = \lim_{l\to\infty}\frac{4l^2 + l}{8l^2}\pi = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8l}\right)\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2 + 5l}{2(2l)^2}\pi = \lim_{l\to\infty}\frac{4l^2 + 5l}{8l^2}\pi = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8l}\right)\pi = \frac{\pi}{2}$$

はさみうちの原理から　$$\lim_{l\to\infty}\frac{S_{2l}}{(2l)^2} = \frac{\pi}{2}$$

すなわち　nが偶数のとき　$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi}{2}$$

となる。

n が奇数のとき $n=2l-1$（l は自然数）とおくと

$$S_{2l-1}=S_{2l}-a_{2l}$$

② より　$2l\pi < a_{2l} < 2l\pi+\frac{\pi}{2}$ ---- ⑤

④, ⑤ より

$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi-\frac{3}{2}\pi\right)-\left(2l\pi+\frac{\pi}{2}\right) < S_{2l}-a_{2l} < \sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-2l\pi$$

$\boxed{\text{不等式の性質}}$

$a<x<b$,

$c<y<d$

ならば

$a-d<x-y<b-c$

ここで

$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi-\frac{3}{2}\pi\right)-\left(2l\pi+\frac{\pi}{2}\right)=4\pi\sum_{k=1}^{l}k-\sum_{k=1}^{l}\frac{3}{2}\pi-2l\pi-\frac{\pi}{2}$$

$$=4\pi\times\frac{l(l+1)}{2}-\frac{3}{2}\pi\times l-2l\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{4l^2+4l-3l-4l-1}{2}\pi$$

$$=\frac{4l^2-3l-1}{2}\pi$$

$$\sum_{k=1}^{l}\left(4k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-2l\pi=4\pi\sum_{k=1}^{l}k+\sum_{k=1}^{l}\frac{\pi}{2}-2l\pi=4\pi\times\frac{l(l+1)}{2}+\frac{\pi}{2}\times l-2l\pi$$

$$=\frac{4l^2+4l+l-4l}{2}\pi=\frac{4l^2+l}{2}\pi$$

だから　$\frac{4l^2-3l-1}{2}\pi < S_{2l}-a_{2l} < \frac{4l^2+l}{2}\pi$

$$\frac{4l^2-3l-1}{2}\pi < S_{2l-1} < \frac{4l^2+l}{2}\pi$$

ここで　$\frac{S_n}{n^2}=\frac{S_{2l-1}}{(2l-1)^2}$ と表せるから

$$\frac{4l^2-3l-1}{2(2l-1)^2}\pi < \frac{S_{2l-1}}{(2l-1)^2} < \frac{4l^2+l}{2(2l-1)^2}\pi$$

$n=2l-1$ で $n\to\infty$ のとき $l\to\infty$ であるから

$$\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2-3l-1}{2(2l-1)^2}\pi=\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2-3l-1}{8l^2-8l+2}\pi=\lim_{l\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{8l}-\frac{1}{8l^2}}{1-\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}}\pi=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2+l}{2(2l-1)^2}\pi=\lim_{l\to\infty}\frac{4l^2+l}{8l^2-8l+2}=\lim_{l\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8l}}{1-\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}}\pi=\frac{\pi}{2}$$

はさみうちの原理から　$\lim_{l\to\infty}\frac{S_{2l-1}}{(2l-1)^2}=\frac{\pi}{2}$

すなわち n が奇数のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$ となる。

したがって n が偶数，奇数によらず

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{\pi}{2}$$

となる。